

בוזן אמצע - מודלים חישוביים - סמסטר ב' התש"ע

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד ופרופ' בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט ורני הוד

הוראות:

1. מומליץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה - שעתיים.
3. במבחן 10 שאלות סגורות. יש לבחור תשובה אחת לכל שאלה.
4. תשובה נכונה מזכה בנקודות. תשובה שגויה איננה מזכה בנקודות.
5. את התשובות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות.
6. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
7. משקל כל השאלות זהה.
8. אין להשתמש בכל חומר עזר.
9. יש לענות על השאלות בטופס התשובות בלבד.
10. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
11. יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז. ומספר גרסה.
12. הקפידו למלא את מספר הגרסה.

בהצלחה!

1. נגדיר מודל חישובי חדש בשם Balanced-2-PDA. זהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי בעל שתי מחסניות, כאשר המחסניות חייבות להיות באותו גובה בכל רגע נתון (קרי: חייבים להכניס לשתייהן ולהוציא משתייהן תוים בו־זמנית).

מחלקת השפות המתקבלת ע"י מודל זה:

(א) היא בדיוק מחלקת השפות הרגולריות.

(ב) מכילה ממש את מחלקת השפות הרגולריות ומוכלת ממש במחלקת השפות חסרות ההקשר.

(ג) היא מחלקת השפות חסרות ההקשר.

(ד) מכילה ממש את מחלקת השפות חסרות ההקשר.

2. פונקציה $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ נקראת הומומורפיזם אם מתקיים $h(xy) = h(x)h(y)$ לכל $x, y \in \Sigma^*$ (שימו לב שתמיד $h(\epsilon) = \epsilon$ ושמשפיק להגדיר את פעולת h על תוים בודדים וההרחבה למילים נובעת מהתכונה). עבור שפה L מעל א"ב Σ נסמן $h(L) = \{h(w) : w \in L\}$. להלן זוג טענות:

א' לכל שפה L ולכל הומומורפיזם h , אם L רגולרית אז גם $h(L)$ רגולרית.

ב' לכל שפה L ולכל הומומורפיזם h , אם $h(L)$ רגולרית אז גם L רגולרית.

אלו מהטענות נכונות?

(א) טענה א' בלבד.

(ב) טענה ב' בלבד.

(ג) שתי הטענות.

(ד) אף אחת מהטענות.

3. תהי $L = \{a^n b^m : n \neq m\}$ שפה מעל $\Sigma = \{a, b\}$.

האם ניתן להשתמש בלמת הניפוח על מנת להוכיח שהשפה L אינה רגולרית?

(א) למרות ש- L אינה רגולרית, לא ניתן להוכיח זאת ע"י שימוש ישיר בלמת הניפוח.

(ב) ניתן, למשל בעזרת המילה $w_p = a^p b^{p^2+p}$ כאשר p קבוע הניפוח.¹

(ג) ניתן, למשל בעזרת המילה $w_p = a^p b^{p^2+p}$ כאשר p קבוע הניפוח.

(ד) לא ניתן להוכיח זאת כלל, מאחר ו- L רגולרית.

4. תהי $L = \{w : \text{for any prefix } u \text{ of } w, |\#_0(u) - 2 \cdot \#_1(u)| \leq 2\}$ שפה מעל $\Sigma = \{0, 1\}$.

כמה מצבים ל-DFA הקטן ביותר שמקבל את L ?

(א) 4.

(ב) 5.

(ג) 6.

(ד) ∞ (קרי: השפה L כלל אינה רגולרית).

5. תהי $L = \{a^i b^j a^k : i \geq j \geq k \geq 0\} \cup \{b^i a^j b^k : i \geq j \geq k \geq 0\}$ שפה מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$.

מהי מחלקת השפות הקטנה ביותר אליה השפה L^* שייכת?

(א) שפות רגולריות.

(ב) שפות הניתנות לקבלה ע"י PDA דטרמיניסטי.

(ג) שפות הניתנות לקבלה ע"י PDA לא דטרמיניסטי.

(ד) תשובות א'-ג' אינן נכונות.

¹תזכורת: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

6. נגדיר את הפעולה הבאה על שפות מעל א"ב Σ : $\text{inv}(L) = \{xy^Rz : x, y, z \in \Sigma^*, xyz \in L\}$.
אלו מחלקות של שפות סגורות תחת הפעולה inv ?
- (א) שפות רגולריות ושפות חסרות הקשר.
(ב) שפות רגולריות בלבד.
(ג) שפות חסרות הקשר בלבד.
(ד) לא שפות רגולריות ולא שפות חסרות הקשר.
7. תהיינה L_1 ו- L_2 שפות המתקבלות ע"י PDA דטרמיניסטיים.
מהי מחלקת השפות הקטנה ביותר אליה בהכרח שייך האיחוד $L_1 \cup L_2$?
- (א) שפות רגולריות.
(ב) שפות הניתנות לקבלה ע"י PDA דטרמיניסטי.
(ג) שפות הניתנות לקבלה ע"י PDA לא דטרמיניסטי.
(ד) תשובות א'-ג' אינן נכונות.
8. מהי עוצמתה של קבוצת השפות מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$ שלא ניתן לרשום כאיחוד סופי או בן-מניה של שפות רגולריות?
- (א) 0 (קרי: כל שפה בינארית היא איחוד סופי או בן-מניה של שפות רגולריות).
(ב) מספר סופי חיובי כלשהו.
(ג) \aleph_0 .
(ד) \aleph .
9. תהי $L = \{1^n : n \text{ is a composite number}\}$ שפה מעל הא"ב $\Sigma = \{1\}$.
מהי מחלקת השפות הקטנה ביותר אליה השפה L שייכת?
- (א) שפות רגולריות.
(ב) שפות הניתנות לקבלה ע"י PDA דטרמיניסטי.
(ג) שפות הניתנות לקבלה ע"י PDA לא דטרמיניסטי.
(ד) תשובות א'-ג' אינן נכונות.
10. נאמר שהמילה $x = x_1x_2 \cdots x_n$ היא תת-סדרה של המילה $y = y_1y_2 \cdots y_m$ (כאשר $x_i, y_j \in \Sigma$) אם קיימים אינדקסים $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m$ כך ש- $x_i = y_{j_i}$ עבור $i = 1, \dots, n$.
נגדיר את הפעולה הבאה על שפות: $\text{subseq}(L) = \{x : x \text{ is a subsequence of some } y \in L\}$.
תהי L שפה אונארית. איזה מהתנאים הבאים הכרחי ומספיק לכך ש- $\text{subseq}(L)$ תהיה רגולרית?
- (א) השפה L סופית.
(ב) השפה L רגולרית.
(ג) השפה L חסרת הקשר.
(ד) (קרי: תמיד מתקיים ש- $\text{subseq}(L)$ רגולרית).