

סדר	5	4	3	2	1

## מבחן מועד א' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ד (2014)

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' ישי מנצור, ד"ר יפתח הייטנר

מתרגלים: מריאנו שיין, אורן זלצמן, יובל מוסקוביץ'

18/07/14

### הוראות

1. מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות. לא תינתן כל הארכה נוספת.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. יש לענות על השאלות הסגורות בטופס התשובות ועל השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה). מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.  
יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז. ומספר גרסה.
6. במבחן 14 שאלות סגורות ו-5 שאלות פתוחות.
  - א. בנוגע לשאלות הסגורות:
    - סה"כ 32 נקודות. הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
    - תשובה שגויה לא תזכה לנקודות.
    - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בטופס התשובות המצורף.
    - יש לזכור למלא שם, ת.ז. ומספר גרסה בטופס התשובות המצורף.
  - ב. בנוגע לשאלות הפתוחות:
    - סה"כ 70 נקודות. הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
    - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
    - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
    - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח  $P \neq NP$ , אלא אם מצוין אחרת.

מספר הגרסה שלך הוא: 1 סמן זאת כרגע בטופס התשובות!

**בהצלחה!**

## חלק א: שאלות סגורות

### שאלות לדוגמא:

בשתי השאלות הבאות ישנן סדרת טענות ולכל אחת מהן יש לקבוע אם הטענה נכונה, לא נכונה או לפעמים נכונה.

להלן טענות לדוגמא עם הפתרונות:

עבור השפות A ו-B נתון:

- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-A ל-B.

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה לבחור ע"פ המפתח הבא:

- הטענה **נכונה**, עבור כל בחירה של השפות A, B, ו-C.
- הטענה **לא נכונה**, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D.
- לפעמים** (בחירה של השפות A, B) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה.

טענה לדוגמא: B לא B או P-A ב-P

פתרון: הטענה תמיד נכונה כיוון שאם B ב-P אזי A ב-P

טענה לדוגמא: B ב-P ו-A ב-P

פתרון: הטענה לפעמים נכונה ולפעמים אינה נכונה כי יתכן:

$$(1) \{01\} = B = A \text{ והטענה נכונה}$$

$$(2) \text{ יתכן } A_{TM} = B = A \text{ ולכן שניהם לא ב-P והטענה לא נכונה}$$

טענה לדוגמא: B ב-P ו-A אינה ב-P

פתרון: הטענה לא נכונה: אם B ב-P אזי גם A ב-P

**חלק א.1**

עבור שפות A, B, C, ו-D נתון:

- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-A ל-B
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-B ל-C
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-D ל-C

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה. בטופס התשובות יש לבחור ע"פ המפתח הבא:

- ג. הטענה נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D
- ד. הטענה לא נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D
- ה. לפעמים (בחירה של השפות A, B, C, ו-D) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה.

**טענה 1 (2 נקודות)**

B לא ב co-NP, או A ב P.

**טענה 2 (2 נקודות)**

B לא ב NP, או A ב NP.

**טענה 3 (2 נקודות)**

C לא ב NP, או A לא NP-hard, או B NP-complete.

**טענה 4 (2 נקודות)**

C ב RE ולא ב R- $\bar{D}$  NP-complete.

**טענה 5 (2 נקודות)**

C היא co-NP- $\bar{D}$  RE ולא ב R.

## חלק א.2

עבור שפות A, B, C, D ו-E נתון:

- יש רדוקציה מיפויי מ-A ל-B
- יש רדוקציה מיפויי מ-B ל-D
- יש רדוקציה מיפויי מ-A ל-C
- יש רדוקציה מיפויי מ-C ל-D
- E ב RE

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה. בטופס התשובות יש לבחור ע"פ המפתח הבא:

- הטענה נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, D ו-E
- הטענה לא נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, D ו-E
- לפעמים (בחירה של השפות A, B, C, D ו-E) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה

### טענה 6 (2 נקודות)

D לא ב NP או A ב-R

### טענה 7 (2 נקודות)

A לא ב RE-Complete או יש רדוקציה מיפויי מ-E ל-D

### טענה 8 (2 נקודות)

A לא ב RE או B ב R

### טענה 9 (2 נקודות)

לא קיים אנומרטור ל C או קיים אנומרטור מונוטוני ל A

### טענה 10 (2 נקודות)

B ב RE, C ב co-RE, או A ב RE-Complete

**חלק א.3**

בכל אחת מן השאלות הבאות נתונות שתי שפות  $L_1, L_2$ . סמן עבור כל שאלה:

- א. אם מתקיים  $L_1 \subsetneq L_2$
- ב. אם מתקיים  $L_2 \subsetneq L_1$
- ג. אם מתקיים  $L_1 = L_2$
- ד. אם לא מתקיים אף אחד מהסעיפים הנ"ל

**טענה 11 (3 נקודות)**

$$L_1 = \{0^n 1^{2^n} 0^n\}$$

$L_2 = L(G)$ , כאשר  $G$  הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow AB \quad A \rightarrow 0A1 \mid \epsilon \quad B \rightarrow 1B0 \mid \epsilon$$

**טענה 12 (3 נקודות)**

$L_1 = L(G)$ , כאשר  $G$  הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow 11S2 \mid 2S11 \mid 121S \mid \epsilon$$

$$L_2 = \{w : \#_1(w) = 2 \cdot \#_2(w)\}$$

**טענה 13 (3 נקודות)**

$L_1 = L(G)$ , כאשר  $G$  הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow 0S1 \mid 00S1 \mid 000S1 \mid \epsilon$$

$$L_2 = L(R) \text{ כאשר } R \text{ הינו הביטוי הרגולרי: } R = ((0 + 00 + 000)1)^*$$

**טענה 14 (3 נקודות)**

$$L_1 = h(L) \cap \{0^*1^*\} \text{ כאשר}$$

$$L = \{w : \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\} \text{ מעל הא"ב } a, b, c$$

$$h : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1\} \quad h(a) = 0 \quad h(b) = 0 \quad h(c) = 1$$

$L_2 = L(G)$ , כאשר  $G$  הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow 0S1 \mid \epsilon$$

## חלק ב: שאלות פתוחות

שאלה 1 (20 נקודות).  
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (5 נקודות)

בעיית צביעה בארבע צבעים 4Col:  
צביעה של גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ב 4 צבעים היא פונקציה  $c: V \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$   
המקיימת  $\forall (u, v) \in E c(u) \neq c(v)$ .  
כלומר, כל זוג קודקודים המחוברים בקשת צבועים בצבעים שונים.

הוכח כי  $4Col = \{G = (V, E) : \exists c: V \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} s.t. (u, v) \in E \implies c(u) \neq c(v)\}$   
היא NP-complete:

1. הוכח כי 4Col היא בNP (2 נק)

---

---

---

2. הראה רדוקציה פולינומיאלית משפה NP-complete ל 4Col (18 נק)  
a. הרדוקציה:

---

---

---

b. הוכחת נכונות הרדוקציה:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

תעודת זהות:

מספר מחברת:

שאלה 2 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (5 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L_2 = \{ \langle M \rangle : M \text{ is a TM and } \forall x \in \Sigma^* \exists y \in \Sigma^* \text{ s. t. } xy \in L(M) \}$$

הראה שהשפה  $L_2$  אינה ב-RE על ידי רדוקציה מבעית האי-עצירה

הרדוקציה:

---

---

---

נכונות הרדוקציה

---

---

---

---

---

---

---

---

---

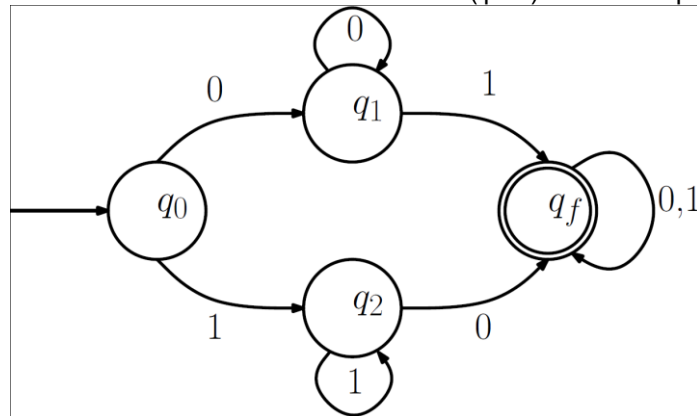
---

שאלה 3 (10 נקודות).  
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (2 נקודות)

בהינתן שפה  $L$  נגדיר את השפה  
 $\min(L) = \{x \in L: \forall y \text{ s.t. } x = yz \ \& \ |z| \geq 1, \text{ it holds that } y \notin L\}$   
כלומר, השפה  $\min(L)$  מכילה את כל המילים בשפה שלא מכילות prefix בשפה.

(א) עבור  $L = (01)^*10^*$ , תן ביטוי רגולרי לשפה  $\min(L)$  (4 נק')

(ב) עבור האוטומט  $A$  הבא, האם השפה  $\min(L(A))$  רגולרית? אם כן, תן ביטוי רגולרי המתאר אותה. אם לא, הסבר בקצרה למה לא (6 נק').



---

---

---

---

---

---

---



תעודת זהות:

מספר מחברת:

**שאלה 4 (10 נקודות).**  
**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (2 נקודות)**

בעיית ה-Set-Packing:

קלט: רשימה  $\langle S_1, \dots, S_n, k \rangle$  כאשר  $k$  מספר טבעי ו- $S_i$  לכל  $i$ , היא קבוצה של מספרים טבעיים.  
שאלה: האם קיימת תת-קבוצה  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  בגודל  $k$ ,  $(|I| = k)$ ,  
כך שלכל  $i \neq j \in I$  מתקיים  $S_i \cap S_j = \emptyset$ .  
(במילים, קיימת תת-קבוצה בגודל  $k$  של  $S_1, \dots, S_n$ , כך שכל שתי קבוצות בה זרות).

הוכח ש Set-Packing היא **NP-complete**:

3. הוכח כי Set-Packing היא **NP** (1 נק)

---

---

---

4. הראה רדוקציה פולינומיאלית מ Independent-Set ל Set-Packing (9 נק)  
a. הרדוקציה:

---

---

---

b. הוכחת נכונות הרדוקציה:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

תעודת זהות:

מספר מחברת:

שאלה 5 (10 נקודות).  
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (2 נקודות)

הוכח שאם  $NP = P$  אזי כל שפה  $L \in P$ , פרט ל  $\emptyset$  ו  $\Sigma^*$  היא NPC. הסבר מדוע הדבר אינו מתקיים עבור  $\emptyset$  ו  $\Sigma^*$ .

---

---

---

---

---

---

---