4.7.2017, י' תמוז התשע"ז

מבחן מועד א' במודלים חישוביים

2017 סמסטר ב'

מרצים: פרופ' נחום דרשוביץ, פרופ' ישי מנצור.

מתרגלים: יובל מוסקוביץ', דפנה שדה, דין דורון.

<u>הנחיות</u>

1. משך הבחינה: שלוש שעות.
2. בבחינה 3 שאלות פתוחות (חלק א') ו- 10 שאלות ברירה-מרובה (חלק ב').
3. על השאלות בחלק א' יש לענות ע"ג דפים אלו בלבד. על השאלות בחלק ב' יש לענות ע"ג התשובונים המצורפים.
4. **הקפידו לרשום בדף התשובות את מספר הגרסא**, המופיע בחלק ב'.
5. חומר עזר מותר בשימוש: שני דפי A4 דו צדדיים משודכים, מצולמים בלבד, עם שם הסטודנט כתוב בכתב יד בכל עמוד. יש להגיש דפים אלו בתום הבחינה.
6. בחלק א' ניתן לענות על <u>שאלה שלמה</u> (לא על סעיף) ב- "לא יודע/ת" ולקבל 20% מניקוד השאלה. במקרה זה, אין להוסיף מלל נוסף ויש לסמן במקום הנדרש.
7. מותר להסתמך, ללא הוכחה, רק על טענות שהוכחו בהרצאות או בתרגולים.
8. המקום הניתן לענות על שאלה הוא לנוחיותכם, ואינו בהכרח מעיד על אורך התשובה הצפוי.

בהצלחה!

חלק א'

שאלה 1 (10 נק')

<u>אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (2 נקודות)</u>

הציגו אלגוריתם אשר בהינתן דקדוק חסר הקשר G מכריע האם $|L(G)| = 2017$. הוכיחו את נכונותו.

פתרון השאלה נמצא בפתרון ת"ב 3.

שאלה 2 (20 נק')

איננו עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (4 נקודות)

נתונה השפה

$$L = \{(\langle G_1 \rangle, \langle G_2 \rangle) : G_1, G_2 \text{ are context free grammars and } L(G_1) = L(G_2)\}$$

סעיף א' – הוכיחו/הפריכו: $L \in \text{RE}$.

☐ הטענה $L \in \text{RE}$ נכונה.

☐ **הטענה $L \in \text{RE}$ לא נכונה.**

הוכחנו בהרצאה כי All_{PDA} אינה ב- RE (בעזרת computational histories). נוכיח כי $L \leq_m All_{PDA}$ ומכאן ינבע ש- L אינה ב- RE.

הרדוקציה $f(\langle P \rangle) = (\langle G_1, G_2 \rangle)$, כך ש-

- אם P אינו קידוד חוקי של PDA, f תחזיר קידוד כלשהו של G_1 כך ש- $L(G_1) = \Sigma^\star$ וקידוד כלשהו של G_2 כך ש- $L(G_2) = \emptyset$.
- אחרת, f תמיר את P ל- CFG ותחזיר את קידודו כ- G_1 ו- G_2 יהיה כך ש- $L(G_2) = \Sigma^\star$.

נכונות:

- הרדוקציה f חשיבה: המ"ט שמחשבת את הרדוקציה צריכה לבדוק אם קידוד הוא חוקי (חשיב), להחזיר קידוד של דקדוק קבוע (כמובן שחשיב) ולבצע המרה של PDA ל- CFG (למדנו אלגוריתם לכך ולכן חשיב).
- אם $\langle P \rangle \in All_{PDA}$ אזי P הוא PDA כך ש- $L(P) = \Sigma^\star$ ולכן $L(G_1) = L(G_2)$ ו- $(G_1, G_2) \in L$.
- אם $\langle P \rangle \notin All_{PDA}$ אזי או שהקידוד אינו חוקי (ובמקרה זה אנו מחזירים שני קידודים שהשפות שלהן שונות) או ש- $L(P) \neq \Sigma^\star$ וגם כאן $L(G_1) \neq L(G_2)$ ולכן $(G_1, G_2) \notin L$.

סעיף ב' – הוכיחו/הפריכו: $L \in \text{coRE}$.

☐ **הטענה $L \in \textbf{coRE}$ נכונה**

☐ הטענה $L \in \text{coRE}$ לא נכונה

נוכיח כי

$$\bar{L} = \{(\langle G_1\rangle, \langle G_2\rangle): G_1, G_2 \text{ are not context free grammars or } L(G_1) \neq L(G_2)\} \in \text{RE}$$

בעזרת מוודא V שעל קלט $\big((\langle G_1\rangle, \langle G_2\rangle), c\big)$:

- אם $\langle G_1\rangle$ או $\langle G_2\rangle$ אינו קידוד חוקי של CFG – קבל.
- בדוק האם המשתנה ההתחלתי ב- G_1 גוזר את c.
- בדוק האם המשתנה ההתחלתי ב- G_2 גוזר את c.
- אם התשובה לשתי הבדיקות הנ"ל שונה זו מזו – קבל.
- דחה.

נכונות:

- המוודא תמיד עוצר, שכן ראינו בכיתה אלגוריתם לבדיקת שייכות לשפת הדקדוק.
- אם $(\langle G_1\rangle, \langle G_2\rangle) \in \bar{L}$ אז או שהקידודים אינם חוקיים (ואז נקבל לכל c) או שקיים c עבורו $c \in L(G_1)$ וגם $c \notin L(G_2)$ או להיפך. עבור ה- c הזה נקבל.
- אם $(\langle G_1\rangle, \langle G_2\rangle) \notin \bar{L}$ אז כמובן שלכל c נדחה.

הוכחנו בכיתה שמוודא שתמיד עוצר שקול לשייכות ל- RE. ניתן כמובן לפתור את השאלה ללא שימוש במוודא.

שאלה 3 (20 נק')

<u>אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)</u> ☐ (4 נקודות)

בהנתן n קבוצות $S_1, \dots, S_n$ של מספרים טבעיים, קבוצה $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ היא "קבוצה של אינדקסים חופפים" (overlapping indices) אם לכל $i, j \in I$ מתקיים ש- $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. נגדיר

$$NDS = \{(S_1, \dots S_n, k) : \exists I. |I| \geq k \text{ and } I \text{ is a set of overlapping indices for } S_1, \dots, S_n\}$$

הוכיחו: $NDS \in \mathrm{NPC}$.

ראשית נראה $NDS \in NP$ ע"י מוודא.

בהינתן קלט $(S_1, \dots S_n, k)$ ועד c, תחילה יש לבדוק ש- $k \leq n$ ואחרת נדחה. המוודא יבדוק ש c הוא קידוד של k אינדקסים, ולכל 2 קבוצות S_i, S_j כך ש $i, j \in [c]$ יש לפחות איבר אחד משותף. אם כן, המוודא יקבל ואחרת ידחה. בהינתן 2 קבוצות ניתן לבדוק בזמן פולינומיאלי שהן לא זרות. כמו כן, ממספר הבדיקות שמוודא מבצע הוא $O(k^2)$ לכן סה"כ זמן הריצה של המוודא פולינומיאלי. בנוסף, אם $(S_1, \dots S_n, k) \in NDS$ אז קיים עד c שעבורו המוודא יקבל, ואחרת,לכל c המוודא ידחה.

כעת נראה $Clique \leq_p NDS$.

בהינתן קלט $\langle G, k \rangle$ פונקצית הרדוקציה f תיצור לכל קודקוד v בגרף $G = (V, E)$ קבוצה S_v ואיברי S_v יהיו הקשתות שמחוברות ל v. פלט הרדוקציה יהיה $(\{S_v\}_{v \in V}, k)$.

נכונות:

הרדוקציה פולינומית – ניתן לייצר את הקבוצות בזמן $O(|V|)$ וזמן יצירת אברי הקבוצות הוא $O(|E|)$ לכן סה"כ זמן הריצה פולינומי בקלט.

אם $\langle G, k \rangle \in Clique$ אז יש בגרף קליק C בגודל k. נסתכל על $I = C$. מתקיים $|I| = k$ ובנוסף, כיוון ש C קליק אז לכל $u, v \in C$, $e = \{u, v\} \in E$ ולכן מהבנייה $e \in S_u \cap S_v$ ולכן $(\{S_v\}_{v \in V}, k) \in NDS$

אם $f(\langle G, k \rangle) = (\{S_v\}_{v \in V}, k) \in NDS$ אז יש קבוצה של אינדקסים חופפים I בגודל k. נראה שהקבוצה $I = C$ היא קליק. לכל $u, v \in I$ $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. כלומר יש איבר משותף ל 2 הקבוצות, מהבנייה בהכרח האיבר הוא הקשת $e = \{u, v\} \in E$, ומכאן שיש קשת בין כל 2 קודקודים ב C ולכן C היא קליק בגודל k.

חלק ב'

שאלה 1

יהי $\Sigma = \{0,1\}$. עבור $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $L_k = \{w \in \Sigma^*: |w| \bmod k = 0\}$, ונגדיר את האוטומט $M_k = (\{q_0, \dots, q_{k-1}\}, \Sigma, \delta_k, q_0, \{q_0\})$ כך ש-

אילו מהטענות הבאות **<u>אינה</u>** נכונה?

א. $L(M_k) = L_k$.
ב. $L_k{}^{\star} = L_k$.
ג. יהיו $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ כך ש $k_1 \neq k_2$, ויהי M_{k_1,k_2} אוטומט כלשהו כך ש- $L(M_{k_1,k_2}) = L_{k_1} \cap L_{k_2}$. אזי, מספר המצבים ב- M_{k_1,k_2} הוא לפחות $k_1 \cdot k_2$.
ד. יהיו $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. אזי, מספר המצבים באוטומט $M_{k_1+k_2}$ הוא בדיוק $k_1 + k_2$.

שאלה 2

עבור שפה L מעל א"ב Σ כלשהו נסמן ב- $rank(L)$ את מספר מחלקות השקילות המושרות ע"י יחס השקילות $\sim_L$. אזי, לכל $L, L' \subseteq \Sigma^\star$ מתקיים:

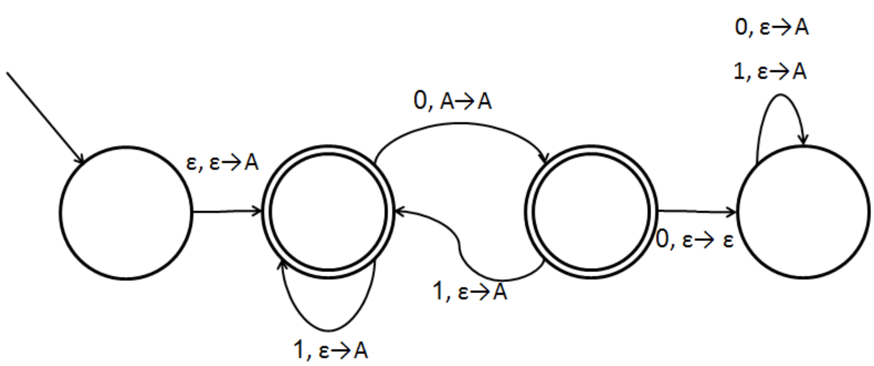
א. $rank(L^\star) \geq rank(L)$.
ב. $rank(L) = rank(L^R)$.
ג. $rank(L \cup L') = rank(L) + rank(L') + 1$.
ד. אף אחת משאר התשובות אינה נכונה.

שאלה 3

נתונה השפה L_1 המתקבלת ע"י הביטוי הרגולרי

$$(1 \cup 01 \cup 001)^\star \cdot (\epsilon \cup 0 \cup 00)$$

ונתונה השפה L_2 המתקבלת ע"י אוטומט המחסנית הבא:



בחרו את התשובה הנכונה:

א. $L_1 = L_2$.
ב. $L_1 \subsetneq L_2$.
ג. $L_2 \subsetneq L_1$.
ד. אף אחת משאר התשובות אינה נכונה.

שאלה 4

עבור הבעיות הבאות, סמנו את הבעיה שכריעה.

א. בהנתן דקדוק ח"ה G, האם $L(G)$ מכילה מילה מתוך $L(0^\star 1^\star)$.
ב. בהנתן דקדוק ח"ה G, האם קיימת מילה w כך ש- $w \notin L(G)$.
ג. בהנתן שני דקדוקים ח"ה G_1, G_2, האם $L(G_1) \setminus L(G_2) = \emptyset$.
ד. בהנתן שני דקדוקים ח"ה G_1, G_2 מעל א"ב Σ, האם $L(G_1) \cup L(G_2) = \Sigma^\star$.

שאלה 5

נתון דקדוק ח"ה G בצורה הנורמלית של חומסקי (CNF) ונתונה $w \in L(G)$ כך ש- $|w| = n > 0$. אזי:

א. כל גזירה של w היא באורך בדיוק $2n-1$.
ב. תתכן גזירה של w באורך קטן מ- $2n-1$.
ג. קיים קבוע c (שיכול להיות תלוי ב- G אך אינו תלוי ב- w) כך שיש גזירה של w באורך c.
ד. אורך הגזירה תלוי בשפה ובמילה הספציפית.

שאלה 6

נתון הדקדוק חסר ההקשר עם משתנה התחלתי S שכלליו ניתנים ע"י:

$$S \to ABD; \quad A \to aAa|\epsilon; \quad B \to bBc|\epsilon; \quad D \to dDd|\epsilon$$

עבור המילה $w = a^{100}b^{100}c^{100}d^{100}$, איזו חלוקה $w = uvxyz$ מתאימה לזו שמובטחת ע"י למת הניפוח לשפות ח"ה?

א. $u = a^{99}; v = a; x = \epsilon; y = b; z = b^{99}c^{100}d^{100}$.
ב. $u = a^{100}; v = b; x = b^{99}c^{99}; y = c; z = d^{100}$.
ג. $u = a^{100}b^{100}; v = c; x = c^{99}; y = d; z = d^{99}$.
ד. $u = a^{100}b^{100}c^{99}; v = c; x = \epsilon; y = d; z = d^{99}$.

שאלה 7

נגדיר את השפה

$$L = \{(\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, \langle M_3\rangle): M_1, M_2, M_3 \text{ are TMs and } L(M_1) \cap L(M_2) = L(M_3)\}$$

אזי:

א. $L \in \text{coRE} \setminus \text{R}$.
ב. $L \leq_m A_{TM}$.
ג. $L \leq_p H_{TM}$.
ד. $L \notin \text{RE} \cup \text{coRE}$.

שאלה 8

תזכורת: $K_U(w)$ היא סיבוכיות קולמוגורוב של המילה w ביחס למכונה אוניברסלית U.

בחרו את התשובה הנכונה:

א. קיימת פונקציה מלאה וחשיבה $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}^\star$ כך ש- $f(n)$ מחזירה מחרוזת כלשהי w באורך n עבורה $K_U(w) \geq n/2$.
ב. השפה $\{n \in \mathbb{N}: \exists w \in \{0,1\}^n. K_U(w) \geq n/2\}$ היא כריעה.
ג. לכל קבוע $\text{c} > 0$ קיים $x \in \{0,1\}^\star$ עבורו $K_U(xx) > K_U(x) + c$
ד. השפה $\{w \in \{0,1\}^\star: K_U(w) \geq |w| \wedge |w| \text{ is prime}\}$ היא כריעה.

שאלה 9

בחרו את התשובה הנכונה:

א. השאלה האם Clique היא coNP-שלמה היא בעיה פתוחה.
ב. השאלה האם $\overline{\text{SAT}} \leq_m \text{SAT}$ היא בעיה פתוחה.
ג. ישנן שפות ב- P שאינן ב- $\text{NP} \cap \text{coNP}$.
ד. ישנן שפות ב- P שהינן ב- $\text{NP} \setminus \text{coNP}$.

שאלה 10

נניח $\text{NP} \neq \text{coNP}$. נתונות ארבע שפות C,B,A ו- D וידועים הפרטים הבאים:

- ישנה רדוקצית מיפוי פולינומיאלית מ-A ל-B.
- ישנה רדוקצית מיפוי פולינומיאלית מ-B ל-C.
- ישנה רדוקצית מיפוי פולינומיאלית מ-D ל-C.
- ישנה רדוקצית מיפוי פולינומיאלית מ-C ל-A.

טענה א: אם A היא NP-complete אזי C היא NP-complete.

טענה ב: אם B היא ב- NP ו- D היא ב- coNP אזי C ב- P.

אזי:

א. טענה א תמיד נכונה וטענה ב לפעמים שגויה.
ב. טענה ב תמיד נכונה וטענה א לפעמים שגויה.
ג. טענה א תמיד נכונה וטענה ב תמיד נכונה.
ד. טענה א לפעמים שגויה וטענה ב לפעמים שגויה.