מודלים חישוביים
תרגול מס' 9

2 ביוני 2017

נושאי התרגול:

- רדוקציות.

1 רדוקציות

בהנתן שתי שפות A ו־ B, אם A ניתנת לרדוקציה ל־ B אז ניתן להשתמש בפתרון של B כדי למצוא פתרון של A. שימו לב שזה לא אומר דבר על האם ניתן וכיצד ניתן לפתור את A או את B לבדן. פורמלית:

הגדרה 1.1 פונקציה חשיבה $f:\Sigma^{\star}\to\Sigma^{\star}$ היא רדוקציה מ־ A ל־ B אם $w\in A$ אם"ם $f(w)\in B$. אם קיימת רדוקציה כזו ("רדוקצית מיפוי") נסמן $A\leq_m B$. שימו לב ש־ $A\leq_m B$ אם"ם $\bar{A}\leq_m\bar{B}$.

משפט 1.2 אם $A\leq_m B$ ו־ $B\in \mathrm{R}$ אז $A\in \mathrm{R}$. אם $A\leq_m B$ ו־ $B\in \mathrm{RE}$ אז $A\in \mathrm{RE}$.

משפט 1.3 אם $A\leq_m B$ ו־ $A\notin \mathrm{R}$ אז $B\notin \mathrm{R}$. אם $A\leq_m B$ ו־ $A\notin \mathrm{RE}$ אז $B\notin \mathrm{RE}$.

נזכיר כי ראינו כבר:

$$\begin{aligned}A_{TM} &= \{\langle M,w\rangle \mid M \text{ is a TM that accepts } w\}\in \mathrm{RE}\backslash \mathrm{R}\\ H_{TM} &= \{\langle M,w\rangle \mid M \text{ is a TM that halts on } w\}\in \mathrm{RE}\backslash \mathrm{R}\end{aligned}$$

ואם נגדיר:

$$H_{TM,\epsilon}=\{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM that halts on } \epsilon\}$$

אז מתקיים כי $H_{TM}\leq_m H_{TM,\epsilon}$ (מדוע?) ולכן למשל $H_{TM,\epsilon}\notin \mathrm{R}$.

תרגיל 1

הוכיחו/הפריכו:

$$L_1=\{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM that visits one state at least twice when running on } \epsilon\}\in \mathrm{R}$$

פתרון

הטענה נכונה. שימו לב כי אם $\langle M\rangle\notin L_1$, M עוצרת לאחר לכל היותר $|Q|$ צעדים. אם כך, נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1. M_1 על קלט $\langle M\rangle$:

1. בודקת ש־ $\langle M\rangle$ הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא – דחה.
2. מחשבת את $|Q|$ – מספר המצבים ב־ M.
3. מריצה את M על ϵ במשך $|Q|+1$ צעדים או עד שעצרה.

4. M_1 תשמור על הסרט את המצבים ש־ M עברה בהם בסמלוץ.
5. תבדוק האם קיים מצב ש־ M ביקרה בו פעמיים. נשים לב שאם M לא עצרה, בהכרח קיים מצב כזה.
6. תקבל אם קיים כזה מצב ותדחה אחרת.

ברור כי M_1 עוצרת על כל קלט, והנכונות מובטחת מהאבחנה שלנו בתחילת השאלה.

תרגיל 2

הוכיחו/הפריכו:

$$L_2=\{\langle M,q\rangle \mid M \text{ is a TM that visits the state } q \text{ at least twice when running on } \epsilon\}\in \mathrm{R}$$

פתרון

הטענה לא נכונה. נראה כי $H_{TM,\epsilon}\leq_m L_2$. צריך להראות פונקציה חשיבה $f\left(\langle M\rangle\right)$ כך שאם $\langle M\rangle$ אינה קידוד של מ"ט חוקית – f תחזיר $\langle M_0,q_0\rangle$ קבועים כך ש־ $\langle M_0,q_0\rangle\notin L_2$ ואחרת תחזיר $\langle M',q\rangle$ וצריך להתקיים ש־ M עוצרת על המילה הריקה אס"ם M' מבקרת במצב q לפחות פעמיים על המילה הריקה. אזי:

- M' תהיה זהה ל־ M רק עם מצב חדש נוסף q ושני מצבים חדשים מבודדים לקבלה ודחיה.
- אם M מקבלת או דוחה (כלומר, מגיעה למצב q_a או q_r), M' עוברת ל־ q ונשארת שם לנצח.
- אין אף מעבר אחר ל־ q.

כדי להוכיח נכונות, נדרש להראות:

1. הפונקציה חשיבה – קל להשתכנע כי ניתן לבנות מ"ט הכותבת את $\langle M'\rangle,q$ על הסרט שלה בהנתן הקלט $\langle M\rangle$.
2. אם M עוצרת על המילה הריקה אז M' מבקרת ב־ q על המילה הריקה לפחות פעמיים (בעצם, אינסוף פעמים) ו־ $\langle M',q\rangle\in L_2$.
3. אם M לא עוצרת על המילה הריקה אז M' לא תגיע ל־ q לעולם ו־ $\langle M',q\rangle\notin L_2$. אם $\langle M\rangle$ אינה קידוד חוקי אז $\langle M_0,q_0\rangle\notin L_2$.

תרגיל 3

הוכיחו כי $L_3=\{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } |L\left(M\right)|=1\}\notin \mathrm{R}$.

פתרון

נראה כי $A_{TM}\leq_m L_3$. תהא $f\left(\langle M\rangle,w\right)=\langle M'\rangle$ כך שאם $\langle M\rangle$ אינה קידוד של מ"ט חוקית – f תחזיר $\langle M_0\rangle$ כך ש־ $L\left(M_0\right)=\emptyset$ ואחרת תחזיר $\langle M'\rangle$ כך ש־ M' על קלט x:

- אם $x\neq 1$, דחה.
- אם $x=1$, הרץ את M על w.
- אם M קיבלה, M' תקבל. אם M דחתה, M' תדחה.

נכונות:

1. הפונקציה חשיבה – ודאו.
2. אם M מקבלת את w אזי $L\left(M'\right)=\{1\}$ ולכן $\langle M'\rangle\in L_3$.
3. אם M לא מקבלת את w אזי $L\left(M'\right)=\emptyset$ ולכן $\langle M'\rangle\notin L_3$. אם $\langle M\rangle$ אינה קידוד אז כנ"ל $\langle M_0\rangle\notin L_3$.

תרגיל 4

הוכיחו כי $L_\infty = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| = \infty\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

פתרון

נראה כי $L_\infty \notin \mathrm{RE}$ ו־ $L_\infty \notin \mathrm{coRE}$. לאחר שנוכיח את הטענה נוכל להשתמש בעובדה שאם עבור שפה A מתקיים ש־ $A \leq_m L_\infty$ אזי $A \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

החלק של $L_\infty \notin \mathbf{coRE}$

נראה כי $A_{TM} \leq_m L_\infty$ (זכרו כי $A_{TM} \notin \mathrm{coRE}$ כי אחרת $A_{TM} \in \mathrm{R}$). תהא $f(\langle M \rangle, w)$ כך שאם $\langle M \rangle$ אינה קידוד של מ"ט חוקית – f תחזיר M_0 כך ש־ $L(M_0) = \emptyset$ ואחרת תחזיר $\langle M' \rangle$ כך ש־ M' על קלט x:

- תתעלם מ־ x ותריץ את M על w.
- M' תענה כמו M.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה – ודאו.
2. אם M מקבלת את w אז M' מקבלת את כל הקלטים ו־ $\langle M' \rangle \in L_\infty$.
3. אם M לא מקבלת את w אז $L(M') = \emptyset$ ו־ $\langle M' \rangle \notin L_\infty$. בדומה אם $\langle M \rangle$ קידוד לא חוקי.

החלק של $L_\infty \notin \mathbf{RE}$

נראה כי $\overline{A_{TM}} \leq_m L_\infty$ (זכרו כי $\overline{A_{TM}} \notin \mathrm{RE}$ כי אחרת $A_{TM} \in \mathrm{R}$). מהמשפט שלמדנו, אנו יודעים כי מספיק להראות $A_{TM} \leq_m \overline{L_\infty}$. תהא $f(\langle M \rangle, w)$ כך שאם $\langle M \rangle$ אינה קידוד של מ"ט חוקית – f תחזיר M_0 כך ש־ $L(M_0) = \Sigma^\star$ ואחרת תחזיר $\langle M' \rangle$ כך ש־ M' על קלט x:

- תריץ את M על w למשך $|x|$ צעדים.
- אם M קיבלה, M' תדחה.
- אם M לא קיבלה, M' תקבל.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה – ודאו.
2. אם M מקבלת את w, נניח לאחר s צעדים, M' תקבל את כל הקלטים באורך קטן מ־ s ותדחה את כל הקלטים באורך גדול מ־ s. לכן, $L(M')$ סופית ו־ $\langle M' \rangle \in \overline{L_\infty}$.
3. אם M לא מקבלת את w אז M' תקבל את כל הקלטים ו־ $\langle M' \rangle \notin \overline{L_\infty}$. בדומה אם $\langle M \rangle$ קידוד לא חוקי.

תרגיל 5

הוכיחו כי $L_4 = \{(\langle M \rangle, x, y) \mid M \text{ is a TM and that halts on exactly one input}\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

פתרון

החלק של $L_4 \notin \mathbf{RE}$

נראה כי $\overline{H_{TM,\epsilon}} \leq_m L_\infty$. תהא $f(\langle M \rangle)$ כך שאם $\langle M \rangle$ אינה קידוד של מ"ט חוקית – f תחזיר Yes Instance כלשהו של L_4 ואחרת תחזיר $(\langle M' \rangle, 0, 1)$ כך ש־ M' על קלט x:

- אם $x = 0$ – מריצה את M על ϵ ועונה כמוהה.
- אחרת – דוחה.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה – ודאו.
2. אם M לא עוצרת על ϵ אז M' עוצרת על 1 ולא על 0 ולכן $(\langle M'\rangle,0,1)\in L_4$. בדומה אם $\langle M\rangle$ קידוד לא חוקי.
3. אם M לא עוצרת על ϵ אז M' לא עוצרת גם על 0 וגם על 1 ולכן $(\langle M'\rangle,0,1)\notin L_4$.

מכיוון ש־ $\overline{H_{TM,\epsilon}}\notin \mathrm{RE}$ נקבל ש־ $L_4\notin \mathrm{RE}$.

החלק של $L_4\notin \mathbf{coRE}$

נראה כי $H_{TM,\epsilon}\leq_m L_\infty$. תהא $f(\langle M\rangle)$ כך שאם $\langle M\rangle$ אינה קידוד של מ"ט חוקית – f תחזיר No Instance כלשהו של L_4 ואחרת תחזיר $(\langle M'\rangle,0,1)$ כך ש־ M' על קלט x:

- אם $x=0$ – מריצה את M על ϵ ועונה כמוהה.
- אחרת – נכנסת ללולאה אינסופית.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה – ודאו.
2. אם M עוצרת על ϵ אז M' עוצרת על 0 ולא על 1 ולכן $(\langle M'\rangle,0,1)\in L_4$.
3. אם M לא עוצרת על ϵ אז M' לא עוצרת גם על 0 וגם על 1 ולכן $(\langle M'\rangle,0,1)\notin L_4$. בדומה אם $\langle M\rangle$ קידוד לא חוקי.

מכיוון ש־ $H_{TM,\epsilon}\notin \mathrm{coRE}$ נקבל ש־ $L_4\notin \mathrm{coRE}$.

תרגיל 6

הוכיחו/הפריכו:

$$L_{100}=\{\langle M\rangle \mid M \text{ on } \epsilon \text{ does not use more than 100 places on the tape}\}\in \mathrm{R}$$

פתרון

הטענה נכונה. נזכר כי קונפיגורציה של מ"ט היא מחרוזת uqv כך ש־ $q\in Q$, $u,v\in\Gamma^\star$ ומיקומו של q במחרוזת הוא כמיקומו של הראש הקורא. כמו כן, אם מ"ט חוזרת על אותה קונפיגורציה פעמיים, היא נכנסת ללולאה אינסופית. אם $\langle M\rangle\in L_{100}$, כמה קונפיגורציות אפשריות יש ל־ M? צריך לבחור את המצב הנוכחי, מיקום הראש הקורא ותוכן הסרט. אם כך, $a(M)=|Q|\cdot 100\cdot|\Gamma|^{100}$. נבנה מ"ט M' שתכריע את L_{100}. M' על קלט $\langle M\rangle$:

- אם המחרוזת $\langle M\rangle$ אינה מקודדת מ"ט חוקית, דחה.
- חשב את $|Q|$ ו־ $|\Gamma|$ עבור M.
- הרץ את M על ϵ למשך $a(M)+1$ צעדים או עד ש־ M עוצרת.
- תוך כדי ההרצה, רשום (על סרט נוסף, למשל) את מספר התאים בהם M משתמשת.
- אם M השתמשה ביותר מ־ 100 תאים, דחה.
- אחרת, קבל.

ברור כי M' תמיד עוצרת. כעת:

1. אם M' מקבלת, אז מתקיים אחד מהשניים:

(א) M על ϵ עצרה ולא השתמשה ביותר מ־ 100 תאים.

(ב) M על ϵ תוך $a\left(M\right)+1$ צעדים לא השתמשה ביותר מ־ 100 תאים בסרט. לכן, M היא בלולאה אינסופית ולא תשתמש בתאים שלא השתמשה בהם קודם.

2. אם M' דחתה, אז M השתמשה ביותר מ־ 100 תאים.

מכאן, ש־ M' מכריעה את L_{100} (היא תמיד עוצרת ועונה כנדרש).