מודלים חישוביים
תרגול מס׳ 4

20 באפריל 2017

נושאי התרגול:

- שפות רגולריות – תכונות סגור נוספות ושאלות סיכום.

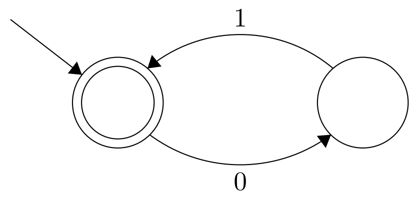
1 שפות רגולריות – תכונות סגור נוספות ושאלות סיכום

בנוסף למשלים, חיתוך, איחוד, שרשור, חזקה וסגור קליני, בהרצאה ראינו כי השפות הרגולריות סגורות גם ל־

- הומומורפיזם – עבור א"ב Δ ו־ Σ, הומומורפיזם הוא פונקציה $h : \Delta \to \Sigma^\star$ כך שעבור $w \in \Delta^\star$, $h(w) = h(w_1) \cdots h(w_n)$ ועבור $L \subseteq \Delta^\star$, $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.
- הומומורפיזם הפוך – עבור הומומורפיזם $h : \Delta \to \Sigma^\star$ נגדיר $h^{-1} : \Sigma^\star \to \mathcal{P}(\Delta^\star)$ ע"י: $h^{-1}(w) = \{x \in \Delta^\star \mid h(x) = w\}$ כך שעבור $L \subseteq \Sigma^\star$, $h^{-1}(L) = \bigcup_{w \in L} h^{-1}(w)$.

תרגיל 1

תהא L_1 השפה של ה־ NFA הבא:



ויהי h הומומורפיזם המוגדר ע"י $h(0) = 101$ ו־ $h(1) = 01$. כתבו ביטוי רגולרי קצר ככל האפשר עבור L_1, $h(L_1)$ ו־ $h^{-1}(L_1)$.

פתרון

1. $L_1 = L\left((01)^\star\right)$.
2. $h(L_1) = L\left((10101)^\star\right)$.
3. $h^{-1}(L_1) = L(1^\star)$.

נוכיח את הסעיף האחרון:

- הכיוון $L(1^\star) \subseteq h^{-1}(L_1)$: יהא $w \in L(1^\star)$, כלומר $w = 1^i$ עבור $i \in \mathbb{N}$ כלשהו. מתקיים ש־ $h(w) = (01)^i \in L_1$ ולכן לפי הגדרה $w \in h^{-1}(L_1)$.
- הכיוון $h^{-1}(L_1) \subseteq L(1^\star)$: יהא $y \in h^{-1}(L_1)$. אזי, קיים $w \in L_1$ כך ש־ $h(y) = w$. בפרט, קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש־ $h(y) = (01)^i$. נניח בשלילה ש־ y מכיל את התו 0. אזי, בהכרח מספר ה 1־ים ב־ $h(y)$ גדול ממספר ה־ 0־ים – בסתירה לכך שב־ $h(y)$ יש אותו מספר של 0־ים ו־ 1־ים. לכן, $y \in L(1^\star)$.

תרגיל 2

הוכיחו כי השפה

$$L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}$$

מעל $\Sigma = \{a,b,c\}$ אינה רגולרית.

פתרון

תהא $\Delta = \{0,1\}$ ונגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \to \Delta^\star$ כך:

$$\begin{aligned} h(a) &= 0 \\ h(b) &= 0 \\ h(c) &= 1 \end{aligned}$$

ואז:

$$h(L_2) = \{w \in \Delta^\star \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$$

נסמן:

$$L' = h(L_2) \cap L(0^\star 1^\star) = \left\{0^i 1^i \mid i \geq 0\right\}$$

נקבל כי L' רגולרית, כי השפות הרגולריות סגורות תחת הומומורפיזם וחיתוך. זה בסתירה למה שהוכחנו בכיתה. מכאן, ש־ L_2 אינה רגולרית.

תרגיל 3

תהא L שפה רגולרית מעל Σ. נגדיר:

$$Skip(L) = \{\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1} \mid \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2n} \in L, n \geq 0\}$$

הוכח כי $Skip(L)$ רגולרית.

פתרון

נגדיר $\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$ כך ש־ $\Sigma' = \{\sigma' \mid \sigma \in \Sigma\}$. נגדיר הומומורפיזם $h : \Delta \to \Sigma^\star$ כך שלכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$ ו־ $h(\sigma') = \sigma$. אם כך, $h^{-1}(L)$ נותן את כל האפשרויות ל"תיוג" מילים מ־ L. פורמלית:

$$h^{-1}(L) = \{\delta_1\cdots\delta_n \mid n \geq 0 \wedge \forall 1 \leq i \leq n.\delta_i \in \{\sigma_i, \sigma_i'\} \wedge \sigma_1\cdots\sigma_n \in L\}$$

ונגדיר $L' = h^{-1}(L) \cap (\Sigma\Sigma')^\star$. כלומר, ב־ L' יש מילים באורך זוגי כך שהתווים במקומות האי־זוגיים אינם מתויגים והתווים במקומות הזוגיים מתויגים. כעת, נגדיר הומומורפיזם נוסף, $g : \Delta \to \Sigma^\star$ כך שלכל $\sigma \in \Sigma$, $g(\sigma) = \sigma$ ו־ $g(\sigma') = \epsilon$. מתקיים ש־

$$g(L') = g\left(h^{-1}(L) \cap (\Sigma\Sigma')^\star\right) = Skip(L)$$

כל הפעולות שהשתמשנו משמרות רגולריות, ולכן $Skip(L)$ רגולרית.

תרגיל 4

תהא L_1 שפה רגולרית ו־ L_2 שפה כלשהי, מעל אותו א"ב Σ. הוכיחו כי החלוקה משמאל,

$$L_2 \backslash L_1 = \{y \in \Sigma^\star \mid \exists x \in L_2.xy \in L_1\}$$

היא רגולרית. נציין כי גם החלוקה מימין $L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists y \in L_2.xy \in L_1\}$ רגולרית.

פתרון

L_1 רגולרית ולכן קיים אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש־ $L(M) = L_1$. נגדיר אוטומט א"ד $N = (Q, \Sigma, \delta', S, F)$ כך ש־ $L(N) = L_2 \backslash L_1$. האוטומט יוגדר כך:

- δ' תהיה למעשה זהה ל־ δ. כלומר, לכל $q \in Q$ ו־ $\sigma \in \Sigma$ מתקיים ש־ $\delta'(q, \sigma) = \{\delta(q, \sigma)\}$.
- $S = \left\{q \in Q \mid \exists x \in L_2 . \hat{\delta}(q_0, x) = q\right\}$. כלומר, המצבים ההתחלתיים של N יהיו אותם מצבים שאליהם ניתן להגיע ב־ L_1 ע"י קריאה של x ב־ L_2.

שימו לב שבשונה מבניות קודמות, בנייה זו אינה קונסטרוקטיבית. למעשה, אנו "מדלגים" על קריאה של x מהקלט (ע"י ניחוש מצב התחלתי מתאים) וממשיכים עם קריאה של y. פורמלית:

$$\begin{aligned}
y \in L(N) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists q \in S . \hat{\delta}'(q, y) \cap F \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow \quad \exists q \in Q, x \in L_2 . \hat{\delta}(q_0, x) = q \wedge \hat{\delta}(q, y) \in F \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in L_2 . \hat{\delta}(q_0, xy) \in F \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in L_2 . xy \in L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad y \in L_2 \backslash L_1
\end{aligned}$$

תרגיל 5

תהינה A ו־ B שפות כלשהן המקיימות את תנאי למת הניפוח לשפות רגולריות. הוכח/הפרך: השפה $A \cup B$ מקיימת את תנאי למת הניפוח.

פתרון

הטענה נכונה. יהיו ℓ_A ו־ ℓ_B הקבועים המתאימים בלמת הניפוח. נבחר $\ell = \max\{\ell_A, \ell_B\}$ ונראה כי $A \cup B$ מקיימת את למת הניפוח עבורו. לכל מילה $w \in A \cup B$ כך ש־ $|w| \geq \ell$, אם $w \in A$ אז היות ו־ $|w| \geq \ell_A$ קיים פירוק $w = xyz$ כך ש־ $|y| > 0$, $|xy| \leq \ell_A \leq \ell$ וכן לכל $i \geq 0$ מתקיים $xy^iz \in A \subseteq A \cup B$ – כנדרש. אם $w \in B$ אז הטענה סימטרית לחלוטין.

תרגיל 6

בהנתן שפה L, נגדיר את השפה L_{per} להיות השפה שמכילה את כל הפרמוטציות של מילים ב־ L. לדוגמא, אם L מכילה את המילה abc אזי L_{per} תכיל את $\{abc, acb, bca, bac, cab, cba\}$. הוכח/הפרך: אם L רגולרית אז גם L_{per} רגולרית.

פתרון

הטענה לא נכונה. תהא $L = \{ab\}^\star$ שפה רגולרית מעל $\Sigma = \{a, b\}$. נניח בשלילה כי L_{per} רגולרית. אזי, מסגירות לחיתוך, $L_{\text{per}} \cap \left(\{a\}^\star \{b\}^\star\right)$ גם היא רגולרית. אבל,

$$L_{\text{per}} \cap \left(\{a\}^\star \{b\}^\star\right) = \left\{a^i b^i \mid i \geq 0\right\}$$

והיא אינה רגולית. מכאן ש־ L_{per} אינה משמרת רגולריות.

תרגיל 7

הראו כי קיים אלגוריתם אשר בהנתן אס"ד D בודק האם קיימת מילה w כך ש־ $w \in L(D)$ וגם $w^R \in L(D)$.

פתרון

נשים לב כי קיימת כזו מילה אס"ם קיימת מילה ב- $L\left(D\right)\cap L\left(D\right)^{R}$. בהנתן D:

1. נבנה אוטומט א"ד D' המקבל את $L\left(D\right)^{R}$ ע"י הפיכת המצב ההתחלתי למצב מקבל, הפיכת המצבים המקבלים למצבים התחלתיים ו- "היפוך" פונקצית המעברים. דהיינו, אם נסמן ב- δ את פונקצית המעברים של D וב- δ' את של D', מתקיים ש- $\delta'\left(q,\sigma\right)=\left\{q'\mid\delta\left(q',a\right)=q\right\}$ לכל $q\in Q$ ו- $\sigma\in\Sigma$. הוכיחו את נכונות הבניה.
2. נבנה אוטומט M המקבל את $L\left(D\right)\cap L\left(D\right)^{R}$ ע"י בניית אוטומט חיתוך מ- D ו- D' כפי שראינו בתרגול.
3. נריץ את אלגוריתם בדיקת ריקנות על M ונענה "כן" אס"ם השפה של M אינה ריקה.

הנכונות נובעת מהאבחנה הנ"ל, מהנכונות לבדיקת ריקנות שלמדנו בהרצאה ומנכונות בניית האוטומטים.

תרגיל 8

לכל שפה L מעל הא"ב Σ עבור $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma$ כך ש- $\sigma_1\neq\sigma_2$ נגדיר

$$Replace\left(L,\sigma_1,\sigma_2\right)=\left\{x\sigma_2y\mid x,y\in\Sigma^{\star}\wedge x\sigma_1y\in L\right\}$$

הוכיחו כי אם L רגולרית אז גם $Replace\left(L,\sigma_1,\sigma_2\right)$ רגולרית.

פתרון

ניתן לפתור בעזרת אוטומט (נסו זאת!). אנחנו נראה בעזרת תכונות סגור. נגדיר $\Delta=\Sigma\cup\{\sigma_2'\}$ והומומורפיזם $h:\Delta\to\Sigma^{\star}$ כך שלכל $\sigma\in\Sigma$, $h\left(\sigma\right)=\sigma$ ו- $h\left(\sigma_2'\right)=\sigma_1$. מתקיים ש- $h^{-1}\left(L\right)$ מכילה את כל המילים ב- L כך שבמקום כל σ_1 מופיע או σ_1 או σ_2'.
כעת, נגדיר

$$L'=h^{-1}\left(L\right)\cap L\left(\Sigma^{\star}\cdot\sigma_2'\cdot\Sigma^{\star}\right)$$

ונשים לב ש- L' מכילה את כל המילים ב- L כך שבמקום כל σ_1 מופיע או σ_1 או σ_2' וגם σ_2' מופיע בדיוק פעם אחת. לבסוף, נגדיר הומומורפיזם $g:\Delta\to\Sigma^{\star}$ כך שלכל $\sigma\in\Sigma$, $h\left(\sigma\right)=\sigma$ ו- $h\left(\sigma_2'\right)=\sigma_2$. נקבל ש-

$$g\left(L'\right)=Replace\left(L,\sigma_1,\sigma_2\right)$$

השפות הרגולריות סגורות תחת הומומורפיזם הפוך, סגירות לחיתוך עם שפות רגולריות והומומורפיזם. לכן, $Replace\left(L,\sigma_1,\sigma_2\right)$ רגולרית.

תרגיל 9

הוכיחו/הפריכו: קיימת שפה המקבל אותה NFA בעל 5 מצבים אך לא מקבל אותה אף DFA בעל 20 מצבים.

פתרון

קיימת. נסתכל על השפה L מעל $\Sigma=\{0,1,2,3,4\}$ של כל המילים $w\in\Sigma^{\star}$ שאינם מכילים את כל האותיות מ- Σ.

- ניתן לבנות עבור L NFA בן חמישה מצבים $q_0,\ldots,q_4$ כולם התחלתיים ומקבלים, כך שלכל i ו- $\sigma\neq i$ יש ב- q_i לולאה עצמית σ.
- ליחס $\sim_L$ יש $2^5>20$ מחלקות שקילות. ודאו לעצמכם כי מילים בעלות אוסף שונה של אותיות מ- Σ יהיו במחלקות שקילות שונות ומילים עם אותו אוסף אותיות יהיו באותה מחלקת שקילות.

תרגיל 10

הוכיחו/הפריכו: קיימות שפות L_1 ו- L_2 כך שאת L_1 מקבל NFA בעל 6 מצבים ואת $L_2\backslash L_1$ (החלוקה משמאל) לא מקבל אף NFA בעל 100 מצבים.

פתרון

לא קיימות. ל־ L_1 יש DFA המקבל אותה ובעל $100 > 64 = 2^6$ מצבים, ולכן לפי הבניה שראינו גם ל־ $L_2 \backslash L_1$ יש NFA בעל 64 מצבים המקבל אותה.