

# מודלים חישוביים

## תרגול מס' 3

30 במרץ 2017

נושאי התרגול:

- למת הניפוח לשפות רגולריות.
- משפט מיהיל-נרוד.

### 1 למת הניפוח לשפות רגולריות

נזכר בלמת הניפוח, שתהווה עבורנו טכניקה להוכחת אי-רגולריות:

**למה 1.1** לכל שפה רגולרית  $L$  קיים  $\ell > 0$  כך שלכל  $s \in L$  המקיימת  $|s| \geq \ell$  קיים פירוק מהצורה  $s = xyz$  כך ש:

1. לכל  $i \geq 0$ ,  $xy^i z \in L$ .

2.  $|y| > 0$ .

3.  $|xy| \leq \ell$ .

איך נשתמש בלמת הניפוח כדי להוכיח ששפה  $L$  כלשהי היא לא רגולרית? נניח בשלילה ש- $L$  רגולרית ויהא  $\ell$  המובטח לנו. נבחר מילה  $s \in L$  באורך גדול מ- $\ell$  ונראה שלכל חלוקה  $xyz$  של  $s$  כך ש- $|y| > 0$  ו- $|xy| \leq \ell$  קיים  $i \geq 0$  כך ש- $xy^i z \notin L$ , בסתירה ללמת הניפוח. שימו לב שלמת הניפוח מספקת תנאי הכרחי לרגולריות, אך לא מספיק (כלומר, ישנן שפות לא רגולריות שמקיימות את למת הניפוח).

#### תרגיל 1

הוכח כי שפת הפלינדרומים מעל  $\Sigma = \{0, 1\}$ , שנסמנה ב- $L_1$ , אינה רגולרית.

#### פתרון

נניח בשלילה ש- $L_1$  רגולרית ויהא  $\ell$  קבוע הניפוח המובטח לנו. נבחר

$$s = 0^\ell 10^\ell \in L_1$$

ונשים לב שאכן  $|s| \geq \ell$ . כעת נשים לב שכל חלוקה של  $s$  ל- $xyz$  כך ש- $|xy| \leq \ell$  ו- $|y| > 0$  מקיימת ש- $y$  מורכבת כולה מאפסים. לכן,  $xy^2 z \notin L_1$ , בסתירה.

#### תרגיל 2

הוכח כי  $L_2 = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$  מעל  $\Sigma = \{0\}$  אינה רגולרית.

## פתרון

נניח בשלילה ש-  $L_2$  רגולרית ויהא  $\ell$  קבוע הניפוח המובטח לנו. נבחר

$$s = 0^{\ell^2} \in L_2$$

ונשים לב שאכן  $\ell \geq |s|$ . נקח חלוקה של  $s$  ל-  $xyz$  כך ש-  $|xy| \leq \ell$  ו-  $|y| > 0$ . נסמן  $|y| = k \leq \ell$  ונסתכל על

$$w = xy^2z = 0^{\ell^2+k}$$

נניח בשלילה ש-  $w \in L_2$ . אזי, קיים  $n$  כך ש-  $\ell^2 + k = n^2$ . אזי:

$$\ell^2 < \ell^2 + k \leq \ell^2 + \ell = \ell(\ell + 1) < (\ell + 1)^2$$

מכאן קיבלנו ש-  $\ell^2 < n^2 < (\ell + 1)^2$ , כלומר שקיים  $n$  המקיים  $\ell < n < \ell + 1$ , בסתירה. אזי,  $L_2$  אינה רגולרית.

## 2 משפט מיהיל-נרוד

נזכר כי עבור שפה  $L$  מעל הא"ב  $\Sigma$ , היחס  $\sim_L$  מעל מילים ב-  $\Sigma^*$  מוגדר כך:  $x \sim_L y$  אם לכל  $z \in \Sigma^*$  מתקיים  $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ . זהו יחס שקילות ולכן מחלק את  $\Sigma^*$  למחלקות שקילות. משפט מיהיל-נרוד יהווה עבורנו כלי נוסף להוכחת אי-רגולריות:

**משפט 2.1**  $L \subseteq \Sigma^*$  רגולרית אם"ם קבוצת המנה  $\Sigma^*/\sim_L$  סופית.

### 1 דוגמא

עבור השפה  $L_3 = L(ba^*b^*)$ , לכל זוג מילים, האם הן באותה מחלקת שקילות?

- $aa$  ו-  $ab$ ? כן. הן אינן רישא של אף מילה בשפה.
- $ba$  ו-  $baa$ ? כן. כל המשך חוקי של  $ba$  יהיה המשך חוקי של  $baa$  ולהיפך.
- $baa$  ו-  $bab$ ? לא. עבור  $z = a$ ,  $baaa \in L_3$  אך  $baba \notin L_3$ .
- $a$  ו-  $\epsilon$ ? לא. עבור  $z = ba$ ,  $aba \notin L_3$  אך  $ba \in L_3$ .

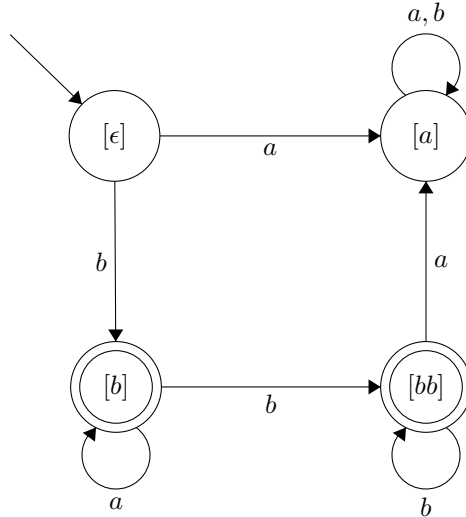
עבור אותה שפה, מהן מחלקות השקילות?

1.  $[b]_{\sim_{L_3}} = L(ba^*)$ .
2.  $[bb]_{\sim_{L_3}} = L(ba^*bb^*)$ .
3.  $[\epsilon]_{\sim_{L_3}} = \{\epsilon\}$ .
4.  $[a]_{\sim_{L_3}} = L((\epsilon + ba^*bb^*)a(b+a)^*)$ .

ואכן ציפינו למספר סופי של מחלקות שקילות. הוכיחו שארבעת הקבוצות הנ"ל הן אכן מחלקות שקילות ושאלו הן כל מחלקות השקילות.

כיצד ניתן להשתמש בכך כדי לבנות אוטומט המקבל את  $L_3$ ?

- המצבים יהיו מחלקות השקילות.
- המצב ההתחלתי יהיה מחלקת השקילות המכילה את  $\epsilon$ .
- המצבים המקבלים יהיו מחלקות שקילות המוכלות ב-  $L_3$ .



### תרגיל 3

הוכיחו כי השפה  $L_4 = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$  אינה רגולרית.

### פתרון

לכל  $i \geq 1$  נסמן  $x_i = 0^i 1$ . נשים לב שלכל  $i \neq j$  מתקיים ש-  $\langle x_i, x_j \rangle \notin \sim_{L_4}$  (למשל, עבור  $z = x_i$  ולכן  $[x_i]_{\sim_{L_4}} \neq [x_j]_{\sim_{L_4}}$ ). אם כן, ליחס  $\sim_{L_4}$  יש אינסוף מחלקות שקילות, ולפי משפט מיהיל-נרוד  $L_4$  אינה רגולרית. מצאו את כל מחלקות השקילות של השפה (רמז: הטיעון הנ"ל תקף לעוד הרבה מילים...).

### תרגיל 4

הוכיחו כי השפה  $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$  אינה רגולרית.

### פתרון

בהרצאה הוכחנו טענה זו לפי למת הניפוח. כעת נראה שתי דרכים שונות. תחילה, בעזרת משפט מיהיל-נרוד. לכל  $i \geq 1$  נסמן  $x_i = 0^i$ . עבור  $i \neq j$  מתקיים כי  $x_i 1^i \in L_5$  אך  $x_j 1^i \notin L_5$ . אם כן, ליחס  $\sim_{L_5}$  יש אינסוף מחלקות שקילות, ולפי משפט מיהיל-נרוד  $L_5$  אינה רגולרית. שימו לב כי מחלקות השקילות הן מהצורה הבאה, עבור  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$C_k = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_a(w) - \#_b(w) = k\}$$

הוכיחו זאת.

כעת, נוכיח כי  $L_5$  אינה רגולרית בעזרת תכונות סגור. נניח בשלילה כי  $L_5$  רגולרית ונשים לב כי

$$L_5 \cap L(0^*1^*) = \{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$$

מכיוון שגם  $L_5$  וגם  $L(0^*1^*)$  רגולריות (מכיוון שהיא מוגדרת ע"י ביטוי רגולרי), החיתוך שלהן הוא רגולרי. אך השפה  $\{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$  אינה רגולרית, בסתירה. לכן,  $L_5$  אינה רגולרית.

### תרגיל 5

יהי  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  ונגדיר  $L_6$  מעל  $\Sigma$  בצורה הבאה:

$$L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall \sigma \in \Sigma. \#_\sigma(w) \leq 1\}$$

מצאו את מחלקות השקילות של  $\sim_{L_6}$  וקבעו האם  $L_6$  רגולרית. הוכיחו תשובתכם.

## פתרון

לכל מילה  $w \in \Sigma^*$  נגדיר וקטור  $v_w$  באורך  $n$  כך ש-  $v_w(i)$  הוא מספר המופעים של  $\sigma_i$  ב-  $w$ . נראה כי מחלקות השקילות של  $\sim_{L_6}$  הן אוסף הוקטורים הבינאריים באורך  $n$  ומחלקה אחת נוספת, שאותה נסמן ב-  $C_{no}$ . דהיינו, אם  $w \in L_6$  אז  $v_w$  הוא וקטור בינארי וכל המילים בשפה בעלי אותו יצוג בינארי נמצאים באותה מחלקת שקילות. עבור כל  $w \notin L_6$  מתקיים  $[w]_{\sim_{L_6}} = C_{no}$ . נסמן את מחלקות השקילות שאינן  $C_{no}$  ב-  $C_0, \dots, C_{2^n-1}$  בהתאם לקידוד העשרוני של הוקטור הבינארי. נוכיח כי אלו אכן מחלקות השקילות של היחס. לשם כך, נוכיח:

1. לכל  $w_1, w_2 \in C_i$  מתקיים  $w_1 \sim_{L_6} w_2$ .
2. לכל  $w_1, w_2 \in C_{no}$  מתקיים  $w_1 \sim_{L_6} w_2$ .
3. לכל  $w_1 \in C_i$  ו-  $w_2 \in C_{no}$  מתקיים  $w_1 \not\sim_{L_6} w_2$ .
4. לכל  $w_1 \in C_i$  ו-  $w_2 \in C_j$  עבור  $i \neq j$  מתקיים  $w_1 \not\sim_{L_6} w_2$ .
5. כל  $w \in \Sigma^*$  שייך למחלקה כלשהי ואף מחלקה אינה ריקה.

ברגע שנוכיח טענו אלו, נוכל לסכם כי  $L_6$  רגולרית – שכן מספר מחלקות השקילות הוא  $2^n + 1$ . אם כך:

1. לכל  $\sigma \in \Sigma$  מתקיים ש-  $\#_\sigma(w_1) = \#_\sigma(w_2)$  וכן  $\#_a(w_1) \leq 1$ . לכן, לכל  $z \in \Sigma^*$  אם קיים  $\sigma \in \Sigma$  כך ש-  $\#_\sigma(z) > 1$  אזי  $w_1 z \notin L_6$  וגם  $w_2 z \notin L_6$ . אחרת, אם קיים  $\sigma \in \Sigma$  כך ש-  $\#_\sigma(z) = 1$  ו-  $\#_\sigma(w_1) = \#_\sigma(w_2) = 1$  אזי  $w_1 z \notin L_6$  וגם  $w_2 z \notin L_6$ . אחרת,  $\#_\sigma(w_1 z) = \#_\sigma(w_2 z) \leq 1$ , ולסיכום:  $w_1 z \in L_6$  אם ו-  $w_2 z \in L_6$ .
2. לכל  $w \in C_{no}$  קיים  $\sigma \in \Sigma$  כך ש-  $\#_\sigma(w) > 1$  ולכן  $w \notin L_6$ . לכל  $u \in \Sigma^*$  גם  $\#_\sigma(wu) > 1$  ולכן  $wz \notin L_6$  כלומר, לכל  $z \in \Sigma^*$  מתקיים  $wz \notin L_6$  וגם  $w_2 z \notin L_6$  ולכן  $w_1 \sim_{L_6} w_2$ .
3. לכל  $\sigma \in \Sigma$  מתקיים  $\#_\sigma(w_1) \leq 1$ . עבור  $z = \epsilon$  מתקיים  $w_1 z \in L_6$  אך  $w_2 z \notin L_6$ , לפי טענה 2. אם כך,  $w_1 \not\sim_{L_6} w_2$ .
4. קיים  $\sigma \in \Sigma$  כך ש-  $\#_\sigma(w_1) \neq \#_\sigma(w_2)$ . נניח בה"כ כי  $\#_\sigma(w_1) = 0$ . אם כך,  $\#_\sigma(w_2) = 1$  ולכן עבור  $z = \sigma$  מתקיים ש-  $w_1 z \in L_6$  אך  $w_2 z \notin L_6$  ולכן  $w_1 \not\sim_{L_6} w_2$ .
5. תחילה, ברור כי לכל  $w \in \Sigma^*$  קיים  $v_w$  שהוא או בינארי (דהיינו, מתאים לאחד מה-  $C_i$  ימים) או לא (מתאים ל-  $C_{no}$ ). ברור גם כי  $\sigma_1 \sigma_1 \in C_{no}$  ולכל  $b \in \{0, 1\}^n$  קיימת  $w \in \Sigma^*$  כך ש-  $v_w = b$  (למשל, ע"י מעבר בסדר לקסיקוגרפי על  $b$  ועבור כל 1 במקום ה-  $i$  נשרשר את  $\sigma_i$ , החל מהמילה הריקה).