מודלים חישוביים
תרגול מס' 13

29 ביוני 2017

נושאי התרגול:

- המחלקה NPC – המשך.

1 המחלקה NPC – המשך

נזכיר:

הגדרה 1.1 שפה $L \in \mathcal{NPC}$ (L היא $\mathcal{NP}$-שלמה) אם:

1. $L \in \mathcal{NP}$.
2. L היא $\mathcal{NP}$-קשה: לכל $A \in \mathcal{NP}$ מתקיים ש־ $A \leq_p L$.

תרגיל 1

הוכיחו כי:

$$\text{IS} \vee \text{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ has an IS or a clique of size } k\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ — השלימו.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\text{IS} \leq_p \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$. הרדוקציה תהיה $f(\langle G, k\rangle) = \langle G', k'\rangle$ כך שעבור $G = (V, E)$, G' יהיה G בתוספת $|V|$ צמתים מבודדים, ו־ $k' = k + |V|$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית – השלימו.
  - אם ל־ G יש קבוצה ב"ת בגודל k אז ל־ G' יש קבוצה ב"ת בגודל $|V| + k$ ולכן $\langle G', k'\rangle \in \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$.
  - אם ל־ G אין קבוצה ב"ת בגודל k אז גם ל־ G' אין קבוצה ב"ת בגודל $|V| + k$ וגם אין קליק בגודל $|V| + k$ (כי הצמתים מבודדים אז הקליק הגדול ביותר יכול להיות בגודל $|V|$). לכן, $\langle G', k'\rangle \notin \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$.

תרגיל 2

נגדיר את השפה NAE3SAT כשפת קידודי הנוסחאות $\langle \varphi \rangle$ כך ש־ φ נוסחת 3CNF וקיימת השמה מספקת ל־ φ כך שבכל פסוקית ליטרל אחד לפחות מקבל True וליטרל אחד לפחות מקבל False. לדוגמא, אם $\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_2)$ אז $\varphi \in \text{NAE3SAT}$ עבור ההשמה $x_1 = 1$ ו־ $x_2 = 0$. הוכיחו כי $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$.

פתרון

הוכיחו לבד כי $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NP}$. כעת, נשים לב שאם v היא השמת Not All Equal לנוסחה φ אז $\bar{v}$ היא גם השמת Not All Equal ל־ φ (ברור כי $\bar{v}$ היא השמת Not All Equal כי בכל פסוקית ערכי האמת יתהפכו ביחס ל־ v ואז מכיוון שהיה לפחות ליטרל אחד שקיבל True ואחד שקיבל False, המצב יישמר).
תחילה נראה כי $\text{NAE4SAT} \leq_p \text{3SAT}$ (כמו NAE3SAT רק עבור נוסחאות 4SAT). הרדוקציה: עבור קלט $\langle\varphi\rangle = \langle C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_\ell\rangle$, נחזיר:

$$\langle\varphi'\rangle = \langle(C_1 \vee z) \wedge (C_2 \vee z) \wedge \ldots \wedge (C_\ell \vee z)\rangle$$

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
- אם $\langle\varphi\rangle \in \text{3SAT}$, תהא v השמה מספקת של φ. נגדיר את v' השמה ל־ φ' להיות זהה ל־ v ו־ $v'(z) = 0$. אזי, v' מספקת את φ' והיא Not All Equal ולכן $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE4SAT}$.
- אם $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE4SAT}$, תהא v השמת Not All Equal ל־ φ'. נוכל להניח בה"כ כי $v(z) = 0$ (אחרת, נסתכל על $\bar{v}$ והיא גם השמת Not All Equal). אזי, v מספקת גם את φ ולכן $\langle\varphi\rangle \in \text{3SAT}$.

כעת, נראה $\text{NAE3SAT} \leq_p \text{NAE4SAT}$. הרדוקציה: עבור קלט $\langle\varphi\rangle = \langle C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_\ell\rangle$:

- לכל $C_i = a \vee b \vee c \vee z$:
  - פצל את C_i לשתי פסוקיות, $C_i^1 = a \vee b \vee w_i$ ו־ $C_i^2 = \neg w_i \vee c \vee z$.
- נגדיר: $\varphi' = C_1^1 \wedge C_1^2 \wedge \ldots \wedge C_\ell^1 \wedge C_\ell^2$.
- החזר את $\langle\varphi'\rangle$.

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
- אם $\langle\varphi\rangle \in \text{NAE4SAT}$, תהא v השמת Not All Equal ל־ φ. נגדיר את v' השמה ל־ φ' להיות זהה ל־ v ו־

$$v'(w_i) = \begin{cases} 0 & (v(a) = v(b) = 1) \vee (v(c) = v(z) = 0) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ברור כי v' היא השמת Not All Equal ל־ φ': אם $v(a) = v(b) = 0$ אז נקבע את $v'(w_i) = 1$ ואז הפסוקית הראשונה מסתפקת באופן NAE. בפסוקית השנייה אחד מתוך c, z מקבל 1 והליטרל $\neg w_i$ הוא 0 וגם הפסוקית השנייה מסתפקת באופן NAE. שאר המקרים מאוד דומים, ולכן $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE3SAT}$.

- אם $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE3SAT}$ עם השמת Not All Equal v' אז לא יתכן ש־ a, b, c, z כולם True או שכולם False ולכן v' היא גם השמת Not All Equal ל־ φ ו־ $\langle\varphi\rangle \in \text{NAE4SAT}$.

הוכחנו ש־ $\text{3SAT} \leq_p \text{NAE4SAT}$ ו־ $\text{NAE4SAT} \leq_p \text{NAE3SAT}$. מהטרנזיטיביות של רדוקציות פולינומיות, $\text{3SAT} \leq_p \text{NAE3SAT}$. 3SAT היא ב־ $\mathcal{NPC}$, NAE3SAT היא ב־ $\mathcal{NP}$ ובסך הכל $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$.

תרגיל 3

נזכיר כי $\text{SubsetSum} = \left\{\langle x_1, \ldots, x_k, t\rangle \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, k\} . \sum_{i \in I} x_i = t\right\}$. הוכיחו כי:

$$\text{Partition} = \left\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \exists S \subseteq \{1, \ldots, n\} . \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i\right\} \in \mathcal{NPC}$$

ניתן להניח כי כל המספרים בשתי השפות הינם אי־שליליים.

פתרון

נראה כי $\text{Partition} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\text{Partition} \in \mathcal{NP}$ – בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\text{SubsetSum} \leq_p \text{Partition}$. הרדוקציה תהיה

$$f\left(\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle\right)=\langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle$$

כך שאם נסמן $k=\sum_{i=1}^n x_i$, אז $a=t+k$ ו־ $b=2k-t$. ואז:

  - ברור כי f פולינומית.
  - אם $\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle \in \text{SubsetSum}$ אז קיימת $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ כך ש־ $\sum_{i\in I} x_i=t$. נגדיר

$$S=\{x_i \mid i\in I\}\cup\{b\}$$

ואז:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S} y &= \sum_{i\in I} x_i+b=t+2k-t=2k\\ \sum_{y\notin S} y &= \sum_{i\notin I} x_i+a=k-t+t+k=2k\end{aligned}$$

ולכן $\langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle \in \text{Partition}$.

  - אם $\langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle \in \text{Partition}$, קיימת חלוקה מאוזנת I של

$$\langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle$$

ברור כי $a=t+\sum_{i=1}^n x_i$ ו־ $b=2\sum_{i=1}^n x_i-t$ לא יכולים להיות באותו צד של החלוקה. נסמן

$$I'=I\setminus\{a,b\}$$

אם כך:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I'} x_i+2\sum_{i=1}^n x_i-t &= \sum_{i\notin I'} x_i+t+\sum_{i=1}^n x_i\\ \sum_{i\in I'} x_i+\sum_{i=1}^n x_i-t &= \sum_{i\notin I'} x_i+t\\ \sum_{i\in I'} x_i+\sum_{i\in I'} x_i+\sum_{i\notin I'} x_i-t &= \sum_{i\notin I'} x_i+t\\ 2\sum_{i\in I'} x_i &= 2t\\ \sum_{i\in I'} x_i &= t\end{aligned}$$

ולכן $\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle \in \text{SubsetSum}$.

תרגיל 4

הוכיחו כי:

$$\text{XS}=\left\{x_1,\ldots,x_n \mid \exists S\subseteq\{1,\ldots,n\}\,.\sum_{i\in S} x_i+\left|\bar{S}\right|=\sum_{i\notin S} x_i+|S|\right\}\in\mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $\text{XS} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\text{XS} \in \mathcal{NP}$ – בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\text{Partition} \leq_p \text{XS}$. הרדוקציה תהיה

  $$f\left(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\right) = \langle x_1 + 1, \ldots, x_n + 1 \rangle$$

  ואז:

  – ברור כי f פולינומית.

  – מתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle x_1 + 1, \ldots, x_n + 1 \rangle \in \text{XS} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} (x_i + 1) + \left|\bar{S}\right| = \sum_{i \notin S} (x_i + 1) + |S| \\
& \Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} (x_i + 1) - |S| = \sum_{i \notin S} (x_i + 1) - \left|\bar{S}\right| \\
& \Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} (x_i + 1 - 1) = \sum_{i \notin S} (x_i + 1 - 1) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i \\
& \Leftrightarrow \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \text{Partition}
\end{aligned}$$

  ולכן הנכונות מתקיימת.

תרגיל 5

בבעית הסוכן הנוסע, אנו מקבלים משקול של הגרף המכוון המלא (המייצג ערים, כבישים ואורכם) ומספר k וצריכים להכריע האם קיים מעגל המילטוני (המייצג נסיעה בין כל הערים) במשקל לכל היותר k. הוכיחו כי $\text{TS} \in \mathcal{NPC}$.

פתרון

נראה כי $\text{TS} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\text{TS} \in \mathcal{NP}$ – בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא $\mathcal{NP}$ קשה נראה ש- $\text{HamCycle} \leq_p \text{TS}$. הרדוקציה: בהנתן גרף מכוון $G = (V, E)$, נחזיר (G', k) כך ש:
  – הצמתים ב- G' זהים לצמתים ב- G.
  – הקשתות של G' הן כל הקשתות האפשריות ($V \times V$) כך שאם קשת מסוימת היתה בגרף המקורי, המשקל שלה יהיה 1 ואחרת המשקל שלה יהיה 2.
  – $k = |V|$.
- נכונות:
  – הרדוקציה פולינומיאלית – ודאו לעצמכם.
  – אם ב- G יש מעגל המילטוני אז קשתות המעגל ב- G' ימושקלו ב- 1 ולכן ב- G' קיים מעגל המילטוני שמשקלו k.
  – אם ב- G' יש מעגל המילטוני שמשקלו לכל היותר $k = |V|$ אז המעגל לא יכול להכיל קשתות שמשקלן 2 ולכן אותו מעגל הוא גם מעגל המילטוני ב- G.