מודלים חישוביים
תרגול מס' 10

8 ביוני 2017

נושאי התרגול:

- משפט Rice.
- רדוקציות נוספות.
- נושאים נוספים (סיבוכיות קולמגורוב, Busy Beaver).

1 משפט Rice, עוד רדוקציות ונושאים נוספים

נזכיר את משפט Rice:

משפט 1.1 תהא C תת קבוצה לא טריוויאלית של RE ותהא $L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\}$. אזי, $L_C \notin \mathrm{R}$.

מתי C היא תכונה (או, תת קבוצה) לא טריוויאלית? אם קיימות L_1 ו־ L_2 כך ש־ $L_1 \in C$ ו־ $L_2 \notin C$. שימו לב שהתכונה צריכה להיות תכונה של <u>שפות</u>. כלומר, אם $L(M_1) = L(M_2)$ אז $M_1, M_2 \in L_C$ או $M_1, M_2 \notin L_C$. אם כך, עבור הדוגמאות הבאות, האם ניתן להשתמש במשפט רייס?

- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{RE}\}$? לא, כי התכונה טריוויאלית (וגם השפה ב־ R).
- עבור השפה $A_{TM,\epsilon} = \{\langle M\rangle \mid \epsilon \in L(M)\}$? כן, התכונה היא $C = \{L \in \mathrm{RE} \mid \epsilon \in L\}$. זוהי אינה תכונה טריוויאלית, שכן $\emptyset \notin C$ אך $\Sigma^\star \in C$.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ halts on } 101\}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ accepts } 101\}$? כן, זוהי תכונה לא טריוויאלית של שפות.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ always halts}\}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות (למשל, ישנן שתי מ"ט M_1, M_2 כך ש־ $L(M_1) = L(M_2) = \emptyset$ אך אחת עוצרת והשנייה לא – M_1 תהיה המכונה שישר דוחה ו־ M_2 תהיה המכונה שישר נכנסת ללולאה אינסופית).

תרגיל 1

הוכיחו כי $L_{\mathrm{R}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{R}\} \notin \mathrm{R}$.

פתרון

נזכור כי

$$H_{TM} = \{\langle M\rangle, w \mid M \text{ is a TM that halts on } w\} \in \mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$$

אם כך, נגדיר את התכונה $C = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \in \mathrm{R}\}$. C אינה טריוויאלית, כי $H_{TM} \notin C$ ו־ $\Sigma^\star \in C$. לכן, לפי משפט רייס:

$$L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\} = L_{\mathrm{R}} \notin \mathrm{R}$$

תרגיל 2

הוכיחו כי $L_{\mathrm{R}} \notin \mathrm{coRE}$.

פתרון

תהא M_ϵ מ"ט שעל קלט $\langle M\rangle$ מסמלצת את M על ϵ ועונה כמוהה. נראה כי $H_{TM} \leq_m L_{\mathrm{R}}$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש- M עוצרת על w אם"ם $L(M') \in \mathrm{R}$ (הטיפול בקידוד לא חוקי בדומה לתרגול שעבר). M' על קלט x:

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_ϵ על x ואם M_ϵ עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה – ודאו.
- אם M עוצרת על w אזי קיים k כך ש- M עוצרת על w תוך k צעדים. אזי, לכל x כך ש- $|x| \geq k$, M' דוחה את x. מכאן, ש- $L(M')$ סופית ו- $L(M') \in \mathrm{R}$.
- אם M לא עוצרת על w אז $L(M') = L(M_\epsilon)$. מכיוון שידוע ש- $L(M_\epsilon) = A_{TM,\epsilon} \notin \mathrm{R}$, הרי ש- $L(M') \notin \mathrm{R}$.

תרגיל 3

הוכיחו כי $L = \{\langle M\rangle \mid L(M) \text{ is a CFL}\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

פתרון

נראה כי $H_{TM} \leq_m L$ (ואז $L \notin \mathrm{coRE}$) ו- $\overline{H_{TM}} \leq_m L$ (ואז $L \notin \mathrm{RE}$).

הכיוון $H_{TM} \leq_m L$ תהא M_{abc} מ"ט המכריעה את השפה $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \in \mathrm{R}$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש- M עוצרת על w אם"ם $L(M')$ היא שפה ח"ה (הטיפול בקידוד לא חוקי בדומה לתרגול שעבר). M' על קלט x:

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_{abc} על x ו- M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה – ודאו.
- אם M עוצרת על w אז קיים k כך שלכל $|x| \geq k$, M' תדחה את x. מכאן, ש- $L(M')$ סופית ובפרט חסרת הקשר.
- אם M לא עוצרת על w אזי $L(M') = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, שאינה ח"ה.

שימו לב שהנחנו כי הא"ב מכיל את $\{a, b, c\}$. זו כמובן אינה הנחה מגבילה, שכן ניתן לקחת כל שפה שאינה ח"ה מעל הא"ב שנרצה.

הכיוון $L \leq_m \overline{H_{TM}}$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $g(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש־ M לא עוצרת על w אם"ם $L(M')$ היא שפה ח"ה (הטיפול בקידוד לא חוקי בדומה לתרגול שעבר). M' על קלט x:

1. מריצה את M על w.
2. אם M עוצרת אז M' מריצה את M_{abc} על x ועונה כמוהה.

נכונות:

- g חשיבה.
- אם M לא עוצרת על w אזי $L(M') = \emptyset$, שהיא חסרת הקשר.
- אם M עוצרת על w אזי $L(M') = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, שאינה ח"ה.

תרגיל 4

הוכיחו:

$$L_{01} = \left\{w \mid w = 0x \text{ for some } x \in A_{TM} \text{ or } w = 1y \text{ for some } \; y \in \overline{A_{TM}}\right\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$$

פתרון

נראה כי $L \leq_m A_{TM}$ (ואז $L \notin \mathrm{coRE}$) ו־ $L \leq_m \overline{A_{TM}}$ (ואז $L \notin \mathrm{RE}$).

הכיוון $L \leq_m A_{TM}$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle, w) = w'$ כך ש־ M מקבלת את w אם"ם $w' \in L_{01}$. f על הקלט $\langle M\rangle, w$ תחזיר את המחרוזת $0\langle M\rangle, w$. נכונות:

- f חשיבה – ודאו.
- אם M מקבלת את w אז $f(\langle M\rangle, w) = 0\langle M\rangle, w \in L_{01}$.
- אם M לא מקבלת את w אז $f(\langle M\rangle, w) = 0\langle M\rangle, w \notin L_{01}$.

הכיוון $L \leq_m \overline{A_{TM}}$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $g(\langle M\rangle, w) = w'$ כך ש־ M לא מקבלת את w אם"ם $w' \in L_{01}$. g על הקלט $\langle M\rangle, w$ תחזיר את המחרוזת $1\langle M\rangle, w$. נכונות:

- g חשיבה – ודאו.
- אם M לא מקבלת את w אז $g(\langle M\rangle, w) = 1\langle M\rangle, w \in L_{01}$.
- אם M מקבלת את w אז $g(\langle M\rangle, w) = 1\langle M\rangle, w \notin L_{01}$.

שימו לב לטיפול בקידודים לא חוקיים.

תרגיל 5

תהא:

$$L_k = \{\langle M\rangle \mid M \text{ on } \epsilon \text{ does not use more than } k \; \text{ places on the tape}\}$$

ראינו תרגול שעבר ש־ $L_{100} \in \mathrm{R}$. תהא $L = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$. הוכיחו כי $L \notin \mathrm{R}$ (נסו להוכיח בעצמכם כי $L \in \mathrm{RE}$).

פתרון

נראה רדוקציה $H_{TM,\epsilon} \leq_m L$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle) = \langle M'\rangle$ כך ש־ M עוצרת על ϵ אם"ם $\langle M'\rangle \in L$. M' על קלט x:

1. מריצה את M על ϵ ובכל שלב של הסימולציה, M' כותבת $\$$ בסוף תוכן הסרט.
2. אם M עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

1. f חשיבה – ודאו.
2. אם M עוצרת על ϵ אז M' משתמשת במספר סופי של תאים ולכן $\langle M'\rangle \in L$.
3. אם M לא עוצרת על ϵ אז M' משתמשת במספר אינסופי של תאים ולכן $\langle M'\rangle \notin L$.

תרגיל 6

נגדיר תכונה של שפות ב־ coRE להיות תת־קבוצה של שפות $C \subseteq \mathrm{coRE}$. כרגיל, תכונה תקרא לא טריוויאלית אם $C \neq \emptyset$ וגם $C \neq \mathrm{coRE}$. נזכיר כי $L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\}$.

1. הוכיחו/הפריכו: עבור כל תכונה טריוויאלית C מתקיים כי $L_C \in \mathrm{R}$.
2. הוכיחו "משפט רייס" עבור coRE: תהא C תכונה של שפות ב־ coRE כך ש־ $C \cap \mathrm{R} \neq \emptyset$. אזי, $L_C \notin \mathrm{R}$.

פתרון

1. הטענה לא נכונה. נניח $C = \mathrm{coRE}$. אזי, $L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{coRE}\}$. לפי הגדרה, לכל M מתקיים ש־ $L(M) \in \mathrm{RE}$ ולכן מתקיים ש־ $L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{R}\}$. $C = \mathrm{R} \subset \mathrm{RE}$ אינה טריוויאלית לפי משפט רייס, ולכן $L_C \notin \mathrm{R}$.
2. נוכיח את המשפט:

   (א) תהא C תכונה כנ"ל. אזי, $C \cap \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}$ ובנוסף $C \cap \mathrm{R} \neq \emptyset$ ולכן נוכל לקחת את $C \cap \mathrm{R}$ כתכונה לא טריוויאלית של שפות ב־ RE.

   (ב) ממשפט רייס המקורי, $L_{C\cap\mathrm{R}} \notin \mathrm{R}$. נראה כי $L_{C\cap\mathrm{R}} = L_C$:

   i. עבור $\langle M\rangle \in L_{C\cap\mathrm{R}}$ מתקיים ש־ $L(M) \in C \cap \mathrm{R}$ ובפרט $L(M) \in C$ ולכן $\langle M\rangle \in L_C$.

   ii. עבור $\langle M\rangle \in L_C$ מתקיים ש־ $L(M) \in C$. נניח בשלילה ש־ $L(M) \notin C \cap \mathrm{R}$ אזי, $L(M) \in C \backslash \mathrm{R}$ ואז בפרט $L(M) \in \mathrm{RE} \backslash \mathrm{R}$ ולכן $L(M) \notin \mathrm{coRE}$ ו־ $\langle M\rangle \notin L_C$. לכן, $L(M) \in C \cap \mathrm{R}$ ולכן $\langle M\rangle \in L_{C\cap\mathrm{R}}$.

   (ג) משני כיווני ההכלה קיבלנו כי $L_{C\cap\mathrm{R}} = L_C$ ולכן גם $L_C \notin \mathrm{R}$, כנדרש.

תרגיל 7

ראינו בכיתה מדד לסיבוך התיאור, או כמות האינפורמציה, של מחרוזת – סיבוכיות קולמגורוב. תהא M מ"ט ו־ f_M הפונקציה שאותה היא מחשבת. סיבוכיות הקולמגורוב של מחרוזת x ביחס ל־ M, $K_M(x)$, מוגדרת להיות האורך של המחרוזת הקצרה ביותר y המקיימת $f_M(y) = x$. ההגדרה תהיה תמיד ביחס למכונת טיורינג אוניברסלית U, וראינו שמתקיים שלכל x, $K_U(x) \leq K_M(x) + c_M$ כך ש־ c_M תלוי רק ב־ M.

נגדיר את UC להיות שפת המחרוזות שלא ניתנות לכיווץ, כלומר $UC = \left\{x \in \{0,1\}^\star \mid K_U(x) \geq |x|\right\}$. הוכיחו כי $UC \notin \mathrm{R}$.

פתרון

נניח בשלילה כי $UC \in \mathrm{R}$ ויהא f_{UC} המונה המונוטוני המובטח לנו (הוכיחו כי UC אינסופית). בעזרת f_{UC} נגדיר מ"ט M' שעל קלט $\langle n\rangle$ (בבינארי) פולטת את המחרוזת הראשונה בסדר לקסיקוגרפי באורך n השייכת ל־ UC (למה בהכרח קיימת כזו?). לכל n, נגדיר $s_n = (\langle M'\rangle, \langle n\rangle)$.

מצד אחד, לפי ההגדרה של UC, $K_U(s_n) \geq n$. מצד שני, $|s_n| = \log n + c$ עבור קבוע c שאינו תלוי ב־ n. קיבלנו ש־

$$\log n + c'' = |s_n| + c' \geq K_U(s_n) \geq n$$

עבור קבועים c', c'', וזו סתירה עבור n גדול מספיק.

תרגיל 8

נזכיר כי אנו מגדירים את S_n להיות קבוצת כל מכונות הטיורינג בעלות n מצבים שעוצרות על ϵ ו־ $BB(n)$ להיות מספר הצעדים המקסימלי של $M \in S_n$ בריצה על ϵ. הוכחנו ש־ BB אינה חשיבה. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה חשיבה f כך ש־ $f(n) > BB(n)$ לכל n.

פתרון

נניח בשלילה שקיימת כזו f ונראה M' המכריעה את $H_{TM,\epsilon}$. M' על קלט $\langle M\rangle$:

- בודקת ש־ $\langle M\rangle$ קידוד חוקי. אחרת – דוחה.
- מחשבת את n – מספר המצבים של M.
- מחשבת את $A = f(n)$.
- מסמלצת את M על ϵ למשך A צעדים.
- אם M עצרה – קבל. אחרת, דחה.

מההנחה שלנו כי f חשיבה ברור כי M' תמיד עוצרת. כמו כן, M עוצרת על ϵ אם"ם היא עוצרת תוך $BB(|Q|)$ צעדים. מכך ש־ $f(|Q|) > BB(|Q|)$ נובע ש־ M עוצרת על ϵ אם"ם היא עוצרת תוך A צעדים ולכן M' מכריעה את $H_{TM,\epsilon}$, בסתירה.