

מודלים חישוביים

תרגול מס' 1

15 במרץ 2017

נושאי התרגול:

- אותיות, מילים ושפות.
- אוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA).

1 אותיות, מילים ושפות

- אות הינה סימן כלשהו. לדוגמא: $\sigma = \$$ או $\delta = a$.
- אלפבית הינו קבוצה סופית לא ריקה של אותיות. לדוגמא: $\Sigma = \{0, 1\}$ או $\Delta = \{a, b, c\}$.
- מילה מעל א"ב Σ הינה סדרה סופית של אותיות מ- Σ . לדוגמא: $w = abbbca$ היא מילה מעל $\Sigma = \{a, b, c\}$. נסמן ב- ϵ את המילה הריקה. אורך של מילה, $|w|$, הוא מספר האותיות בה.
- שפה הינה קבוצה סופית או אינסופית של מילים מעל א"ב נתון. דוגמאות מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$L_1 = \{\epsilon, 00, 11, 010\} -$$

$$L_2 = \emptyset -$$

$$L_3 = \{\epsilon, 0, 00, 000, \dots\} -$$

- מסמנים את שפת כל המילים מעל הא"ב Σ ב- Σ^* . אם כך, קבוצת כל השפות היא $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

פעולות על מילים:

- שרשור - הדבקת מילים אחת אחרי השנייה. השרשור של w_1 ו- w_2 יסומן פשוט כ- w_1w_2 .
- חזקה - חזקה i של מילה w היא המילה המתקבלת משרשור w לעצמה i פעמים. נוכל אם כך לכתוב:
 $L_3 = \{0^i \mid i \geq 0\}$
- היפוך - הפיכת סדר האותיות במילה. ההיפוך של w יסומן כ- w^R .

פעולות על שפות:

- משלים - עבור שפה L , $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. דוגמא: עבור א"ב $\Sigma = \{a, b\}$ ו- $L_4 = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$,
 $\bar{L}_4 = \{bw \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{\epsilon\}$
- שרשור - עבור שתי שפות A_1, A_2 נגדיר $A_1 \circ A_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in A_1 \wedge w_2 \in A_2\}$. דוגמא: עבור א"ב $\Sigma = \{0, 1\}$,
 $A_1 = \{0^{2i} \mid i \geq 0\}$ ו- $A_2 = \{1^{3i} \mid i \geq 0\}$, $A_1 \circ A_2 = \{0^{2i}1^{3j} \mid i, j \geq 0\}$. בדומה נגדיר חזקה. באופן דומה לחזקה של מילים, נגדיר גם חזקה של שפות.
- איחוד וחיתוך - עבור שתי שפות A_1, A_2 נגדיר $A_1 \cup A_2 = \{w \mid w \in A_1 \vee w \in A_2\}$ ובדומה נגדיר חיתוך.

- סגור קליני - כל המילים שניתן ליצור משרשור מילים בשפה. עבור שפה L , נסמן:

$$L^* = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid \forall i. w_i \in L\} = \bigcup_{k \geq 0} L^k$$

- לכל $L, \epsilon \in L^*$.
- שני המקרים היחידים שהסגור יחזיר קבוצה סופית: $\{\epsilon\}^* = \emptyset^* = \{\epsilon\}$.
- עבור $L = \{00000, 000\}$, $L^* = \{0^{5i+3j} \mid i, j \geq 0\}$.

2 אוטומט סופי דטרמיניסטי

הגדרה 2.1 אס"ד A הוא חמישייה $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש:

- Q הינה קבוצה סופית של מצבים.
- Σ הינו א"ב הקלט.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ הינה פונקצית המעברים.
- $q_0 \in Q$ מצב התחלתי (יחיד).
- $F \subseteq Q$ הינה קבוצת מצבים מקבלים.

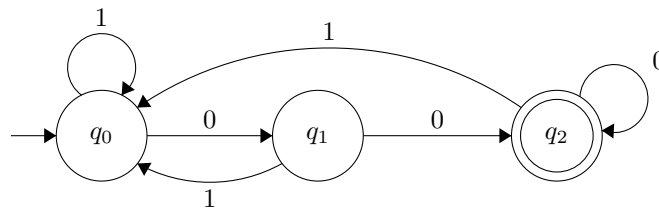
הגדרה 2.2 נגיד ש- M מקבל את $w \in \Sigma^*$ אם $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ כך ש- $\hat{\delta}$ היא פונקצית המעברים המורחבת שהגדרנו בהרצאות.

הגדרה 2.3 תהא A קבוצת המילים ש- M מקבל. נסמן: $L(M) = A$ כשפה ש- M מקבל (או, מזהה).

הגדרה 2.4 שפה L היא רגולרית אם קיים אס"ד המקבל אותה.

1 דוגמא

אס"ד מעל הא"ב $\{0, 1\}$ המקבל את שפת כל המילים המסתיימות ב-00:



תיאור פורמלי:

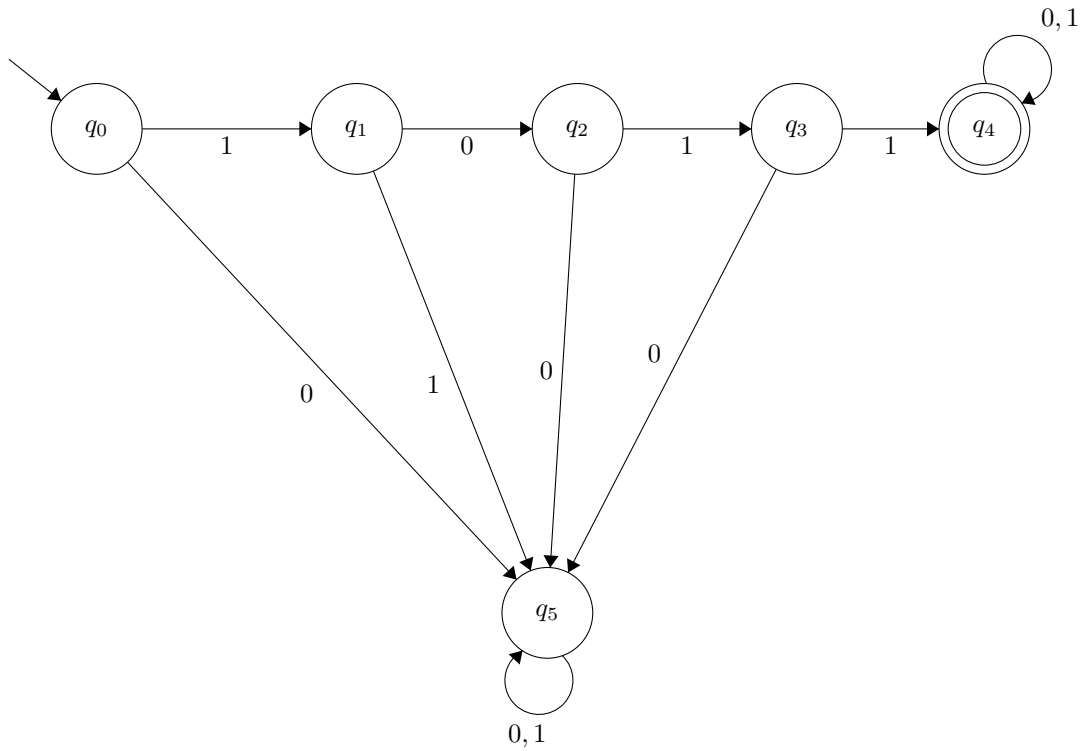
$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \\ &= (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\}) \end{aligned}$$

כך ש- δ מוגדרת כך:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= q_1 & \delta(q_0, 1) &= q_0 \\ \delta(q_1, 0) &= q_2 & \delta(q_1, 1) &= q_0 \\ \delta(q_2, 0) &= q_2 & \delta(q_2, 1) &= q_0 \end{aligned}$$

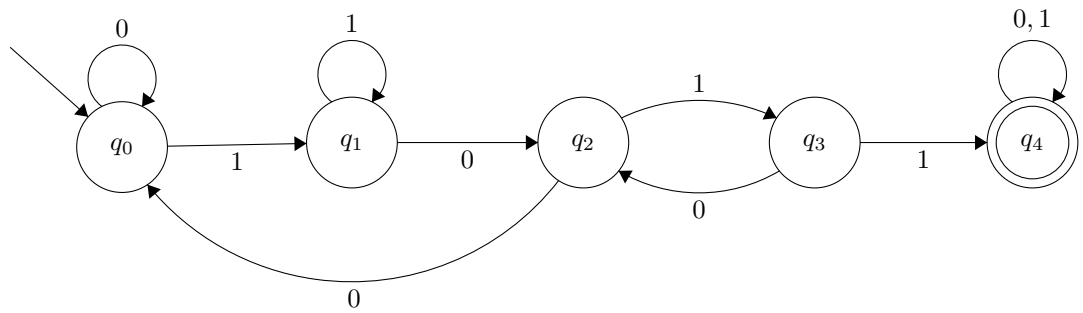
דוגמא 2

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$ המקבל את שפת כל המילים המתחילות ב-1011.



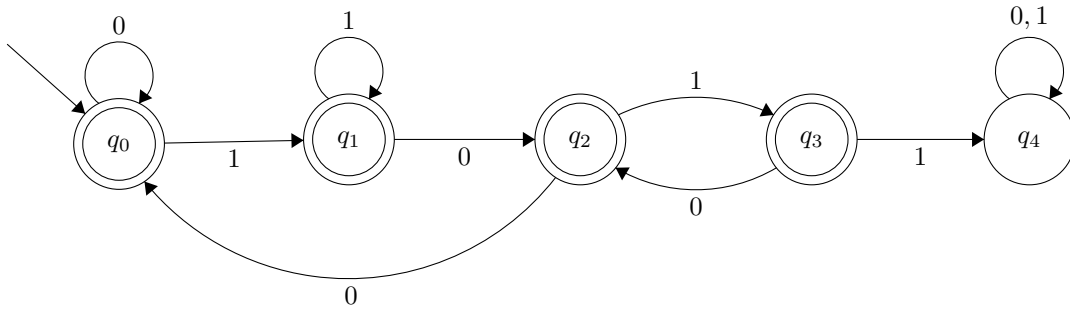
דוגמא 3

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$ המקבל את שפת כל המילים שמכילות 1011.



דוגמא 4

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$ המקבל את שפת כל המילים שלא מכילות 1011 (השפה המשלימה לשפה בדוגמא 3)



תרגיל 1

הוכיחו כי שפות רגולריות סגורות תחת משלים.

פתרון

זוהי טענה פורמלית של מה שכבר ראינו בדוגמא הקודמת. תהא L שפה רגולרית. אזי, קיים אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש- $L(M) = L$. נגדיר M' כך:

$$M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

ומתקיים ש:

$$w \in \bar{L} \Leftrightarrow w \notin L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \notin F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in Q \setminus F \Leftrightarrow w \in L(M')$$

ולכן $L(M') = \bar{L}$, כנדרש (שימו לב שהוכחנו בעצם הכלה דו-כיוונית).

תרגיל 2

הוכיחו כי שפות רגולריות סגורות תחת חיתוך.

פתרון

יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. אזי, קיימים אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים

$$M_1 = (Q^1, \Sigma, \delta^1, q_0^1, F^1)$$

$$M_2 = (Q^2, \Sigma, \delta^2, q_0^2, F^2)$$

כך ש- $L(M_1) = L_1$ ו- $L(M_2) = L_2$. נרצה לבנות אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש- $L(M) = L_1 \cap L_2$. באופן לא פורמלי, M יסמלץ "ריצה במקביל" על M_1 ו- M_2 ויקבל אם הגענו למצב מקבל בשני האוטומטים גם יחד. פורמלית:

$$Q = Q^1 \times Q^2 \bullet$$

$$q_0 = (q_0^1, q_0^2) \bullet$$

$$\delta((q_1, q_2), \sigma) = (\delta^1(q_1, \sigma), \delta^2(q_2, \sigma)), q_1 \in Q^1, q_2 \in Q^2, \sigma \in \Sigma \bullet$$

$$F = F^1 \times F^2 = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F^1 \wedge q_2 \in F^2\} \bullet$$

נוכיח תחילה טענת עזר:

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (\hat{\delta}^1(q_1, w), \hat{\delta}^2(q_2, w)), (q_1, q_2) \in Q \text{ ו- } w \in \Sigma^*$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $|w|$. עבור $|w| = 0$, כלומר $w = \epsilon$, מתקיים ש-

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (q_1, q_2) = \left(\hat{\delta}^1(q_1, w), \hat{\delta}^2(q_2, w) \right)$$

נניח את נכונות הטענה עבור $|w| < n$ ותהא $w = u\sigma$ כך ש- $|w| = n$. אזי:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}((q_1, q_2), w) &= \hat{\delta}((q_1, q_2), u\sigma) \\ &= \delta\left(\hat{\delta}((q_1, q_2), u), \sigma\right) \\ &= \delta\left(\left(\hat{\delta}^1(q_1, u), \hat{\delta}^2(q_2, u)\right), \sigma\right) \\ &= \left(\delta^1\left(\hat{\delta}^1(q_1, u), \sigma\right), \delta^2\left(\hat{\delta}^2(q_2, u), \sigma\right)\right) \\ &= \left(\hat{\delta}^1(q_1, w), \hat{\delta}^2(q_2, w)\right) \end{aligned}$$

■

כעת נחזור להוכחת הטענה המקורית, ש- $L(M) = L_1 \cap L_2$

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}((q_0^1, q_0^2), w) \in F \\ &\Leftrightarrow \left(\hat{\delta}^1(q_0^1, w), \hat{\delta}^2(q_0^2, w)\right) \in F^1 \times F^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\hat{\delta}^1(q_0^1, w) \in F^1\right) \wedge \left(\hat{\delta}^2(q_0^2, w) \in F^2\right) \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \cap L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L_1 \cap L_2 \end{aligned}$$

וסיימנו. הוכחה חלופית תוך שימוש בסגירות שפות רגולריות לאיחוד ומשלים - שימוש בדה־מורגן: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.